$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{V}{EI} \qquad \frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{q}{EI} \qquad v''(x) + \frac{P.v(x)}{EI} = 0$$

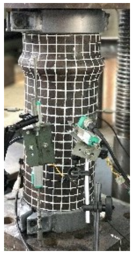
$$v''(x) + \lambda^2 v(x) = \frac{H_B L}{EI} - \frac{H_B x}{EI} \qquad \frac{d^3\theta}{dz^3} - \lambda^2 \frac{d\theta}{dz} = \frac{T_z}{EC_w}$$

PGECIV
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

FEN

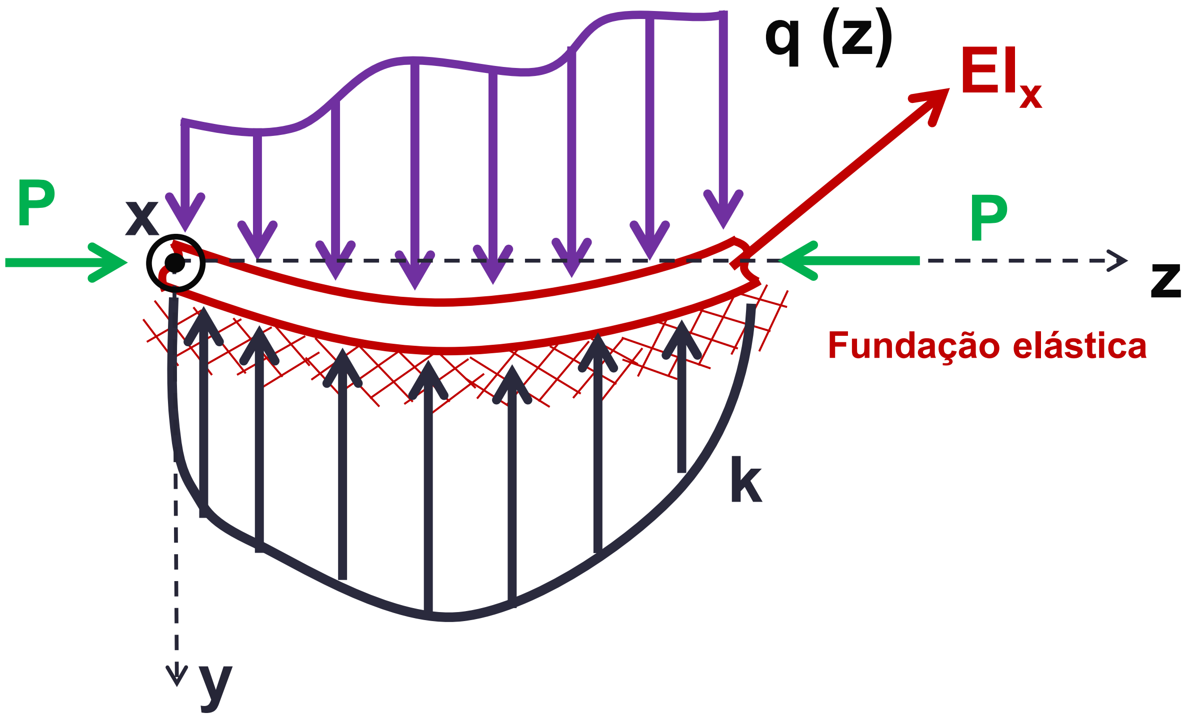
Equações Diferenciais no Plano

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Mestrado Acadêmico / Doutorado
Faculdade de Engenharia – FEN/UERJ
Professor: Luciano Rodrigues Ornelas de Lima

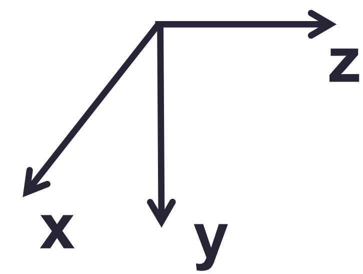


Introdução

- Membro sujeito a força axial P, carga transversal q(z) em N/mm apoiada sobre uma fundação elástica com constante k (N/mm/mm)

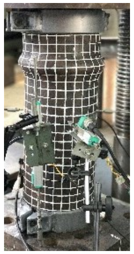


Coordenadas



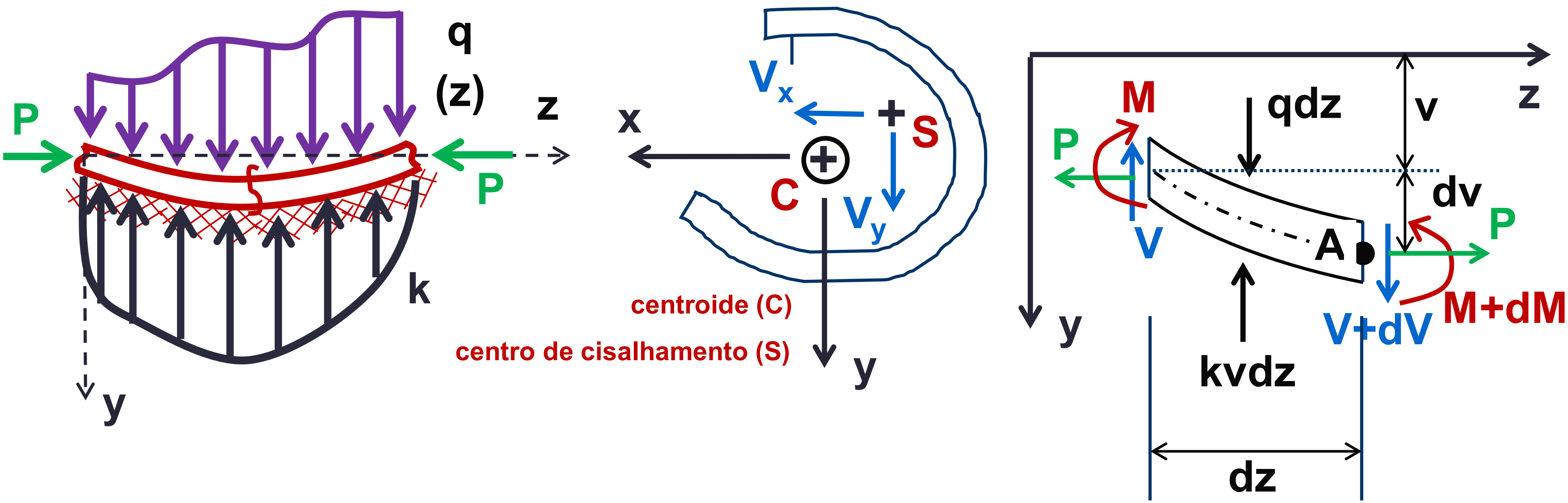
Deslocamenos correspondentes

u, v e w

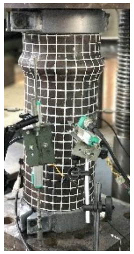


Introdução

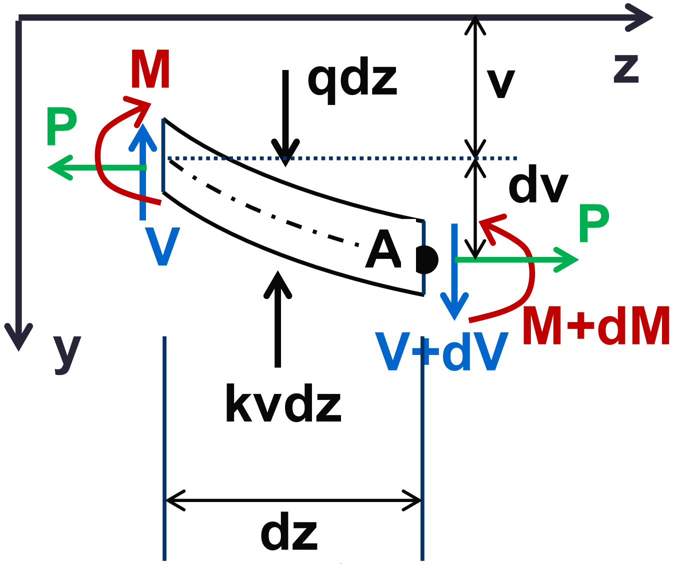
- A seção transversal está no plano xy – corte da seção
- Para que não ocorra torção, os esforços cortantes V_x e V_y deveriam atuar no centro de cisalhamento (S)



Todas as forças são positivas
P é constante



Introdução



$$\sum F_y = 0 \therefore \cancel{V} + kvdz - qdz - (\cancel{V} + dV) = 0$$

$$dV = (kv - q)\,dz \qquad \text{mas } dV = \frac{dV}{dz}dz$$

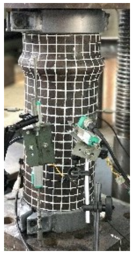
$$\boxed{\frac{dV}{dz} = kv - q} \qquad [1]$$

$$\sum M_A = 0 \therefore \cancel{M} + Vdz - qdz\left(\frac{dz}{2}\right) + kvdz\left(\frac{dz}{2}\right) - (\cancel{M} + dM) - Pdv = 0$$

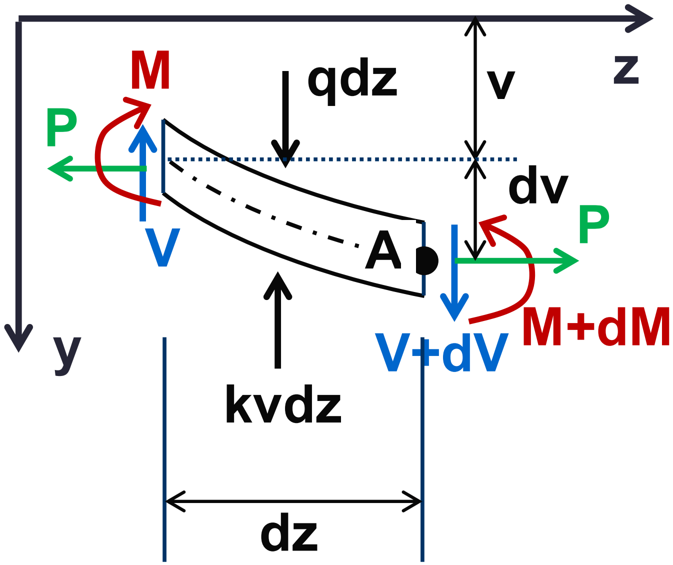
$$\text{mas } dM = \frac{dM}{dz}dz \qquad \text{e} \qquad dV = \frac{dV}{dz}dz$$

$$Vdz - qdz\left(\frac{dz}{2}\right) + kvdz\left(\frac{dz}{2}\right) - \left(\frac{dM}{dz}\right)dz - P\frac{dv}{dz}dz = 0 \text{ e dividindo por } dz$$

$$V - q\left(\frac{dz}{2}\right) + kv\left(\frac{dz}{2}\right) - \left(\frac{dM}{dz}\right) - P\frac{dv}{dz} = 0$$



Introdução



$$V - q\left(\frac{dz}{2}\right) + kv\left(\frac{dz}{2}\right) - \left(\frac{dM}{dz}\right) - P\frac{dv}{dz} = 0$$

como $dz \rightarrow 0$ tem−se que

$$q\left(\frac{dz}{2}\right) = 0 \; e \; kv\left(\frac{dz}{2}\right) = 0$$

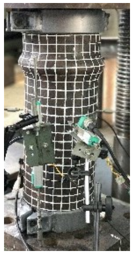
$$\boxed{P\frac{dv}{dz} + \frac{dM}{dz} - V = 0} \qquad [2]$$

diferenciando − se em relação a dz

$$\boxed{P\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{d^2M}{dz^2} - \frac{dV}{dz} = 0} \qquad [3]$$

[1] em [3], tem-se

$$\boxed{P\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{d^2M}{dz^2} = kv - q} \qquad [4]$$



Introdução

$$P\frac{d^2v}{dz^2}+\frac{d^2M}{dz^2}=kv-q \qquad \text{e da RM tem} - \text{se que} \quad M=-EI\frac{d^2v}{dz^2} \quad [5]$$

$$\frac{d^2M}{dz^2}=-EI\frac{d^4v}{dz^4}=-EIv'^{v} \quad [6]$$

[6] em [4], tem-se $P\frac{d^2v}{dz^2}-EI\frac{d^4v}{dz^2}=kv-q \therefore \boxed{EIv'^{v}-Pv''+kv=q}$

Para EI constante

Casos especiais (são desprezadas as deformações por cisalhamento)

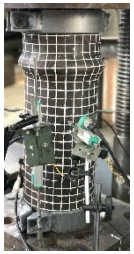
$k=0\ e\ P=0 \ \therefore\ EIv'^{v}=q$ —— **viga**

$k=0\ e\ q=0 \ \therefore\ EIv'^{v}+Pv''=0$ —— **coluna**

$k=0\ e\ P+ \ \therefore\ EIv'^{v}-Pv''=q$ —— **viga em tração**

$k=0\ e\ P- \ \therefore\ EIv'^{v}+Pv''=q$ —— **viga-coluna**

$P=0 \ \therefore\ EIv'^{v}+kv=q$ —— **viga sobre base elástica**



Introdução

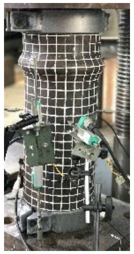
$$EIv'^{v} - Pv'' + kv = q$$

- Solução de uma equação diferencial é v = f(z) e então, encontram-se M, V e q diferenciando-se sucessivamente onde

$$M = -EI\frac{d^2v}{dz^2} = -EIv'' \quad e \qquad V = M' + Pv'$$

- As constantes na solução são obtidas através da avaliação das condições de contorno. A solução geral pode ter duas partes:
  - ✓ solução homogênea quando o L.D.E. for zero (v_h)
  - ✓ solução particular quando o L.D.E. for ≠ 0 (v_p)

$$v = v_h + v_p$$



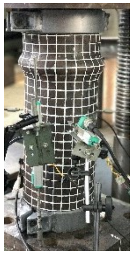
Introdução

$$EIv'^{v} - Pv" + kv = q$$

- Possíveis soluções particulares

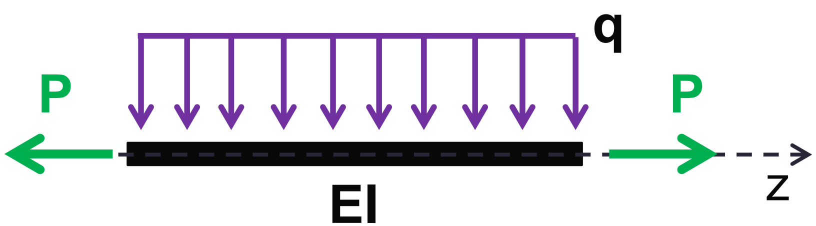
L.D.E.	v_p
$A\ q$	a_1
$A\ q\ z$	$a_1 z + a_2$
$A\ q\ z^2$	$a_1 z^2 + a_2 z + a_3$
$A\ q\ e^{R_z}$	$a_1 e^{R_z}$
$A\ q\ cos\ R_z$	$a_1 cos\ R_z + a_2 sen\ R_z$
$A\ q\ sen\ R_z$	$a_1 cos\ R_z + a_2 sen\ R_z$

Para calcular as constantes a_1, ..., a_n, substitua na E.D. As constantes não dependem das condições de contorno. Se o termo em v_p também aparecer em v_h, deve-se multiplicar v_p por z.



Introdução

- Soluções homogêneas



$$EI_x v'^{v} - Pv'' = q$$

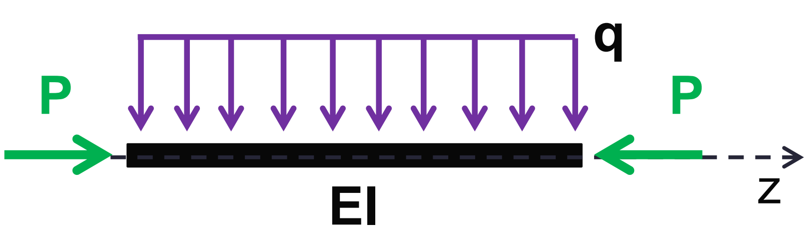
$$v_h = C_1 + C_2 z + C_3 cosh(\lambda z) + C_4 senh(\lambda z)$$

P = tração

EI_x = constante

k = 0

$$\lambda = \sqrt{P/_{EI}}$$



$$EI_x v'^{v} + Pv'' = q$$

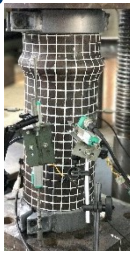
$$v_h = C_1 + C_2 z + C_3 cos(\lambda z) + C_4 sen(\lambda z)$$

P = compressão

EI_x = constante

k = 0

$$\lambda = \sqrt{P/_{EI}}$$



Introdução

- Soluções homogêneas

$$EI_x v^{IV} + Pv'' = 0$$

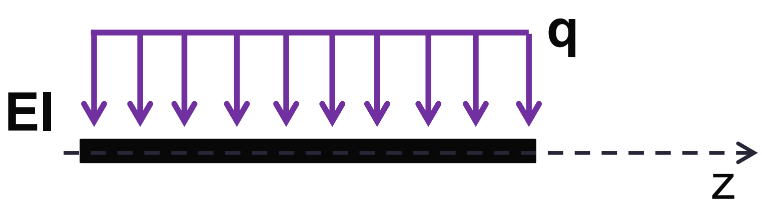
$$v = v_h = C_1 + C_2 z + C_3 cos(\lambda z) + C_4 sen(\lambda z)$$

P = tração

EI_x = constante

k = 0 e q = 0

$$\lambda = \sqrt{P/_{EI}}$$



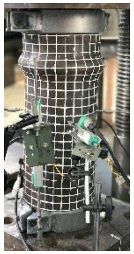
$$EI_x v^{IV} = q$$

$$v_h = C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + C_4 z^3$$

P = 0

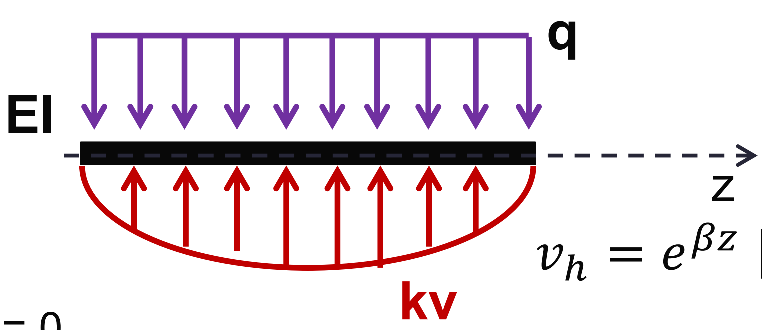
EI_x = constante

k = 0



Introdução

- Soluções homogêneas



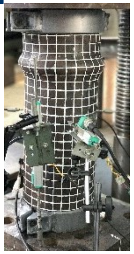
$$EI_x v'^{v} + kv = q$$

$$v_h = e^{\beta z}\,[C_1 cos(\beta z) + C_2 sen(\beta z)] + \\ + e^{-\lambda z}\,[C_3 cos(\beta z) + C_4 sen(\beta z)]$$

P = 0

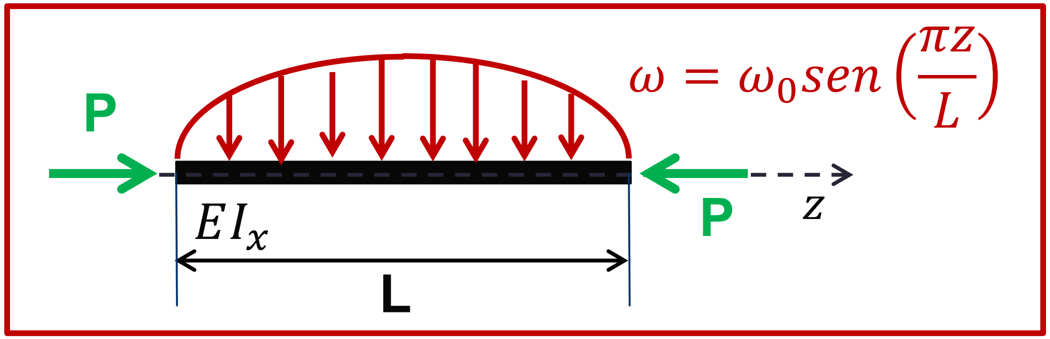
EI_x = constante

$$\beta = \sqrt[4]{k/_{4EI}}$$



Exemplo 1

- Viga sujeita a carga de compressão P e carga variável ω

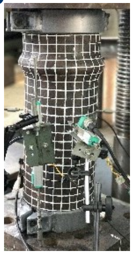


$$EI_x v^{\prime v} + Pv'' = \omega_0 sen\left(\frac{\pi z}{L}\right)$$

$$v = v_h + v_p$$

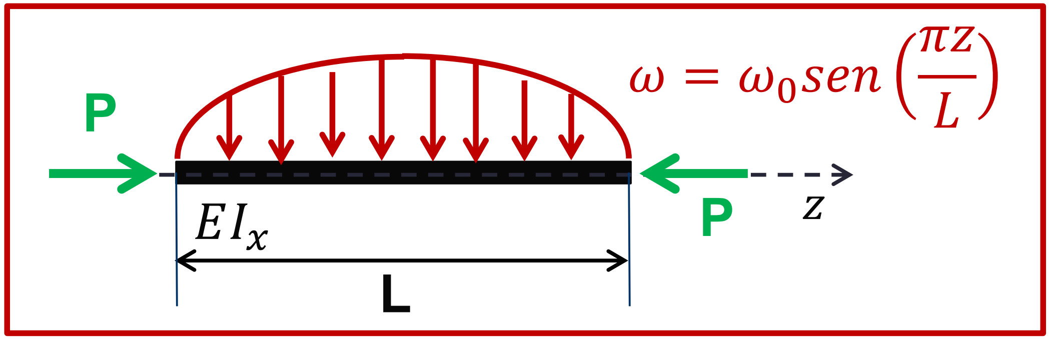
$$v_h = C_1 + C_2 z + C_3 cos(\lambda z) + C_4 sen(\lambda z) \quad \text{com} \quad \lambda = \sqrt{P/_{EI}}$$

$$v_p = a_1 cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) + a_2 sen\left(\frac{\pi z}{L}\right)$$ onde não há termos de v_p em v_h



Exemplo 1

- Viga sujeita a carga de compressão P e carga variável ω



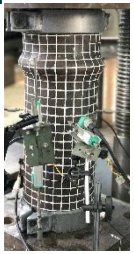
$$v_p = a_1 cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) + a_2 sen\left(\frac{\pi z}{L}\right)$$

$$v_p' = -a_1 \frac{\pi}{L} sen\left(\frac{\pi z}{L}\right) + a_2 \frac{\pi}{L} cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)$$

$$v_p'' = -a_1 \frac{\pi^2}{L^2} cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) - a_2 \frac{\pi^2}{L^2} sen\left(\frac{\pi z}{L}\right)$$

$$v_p''' = a_1 \frac{\pi^3}{L^3} sen\left(\frac{\pi z}{L}\right) - a_2 \frac{\pi^3}{L^3} cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)$$

$$v_p^{\prime v} = a_1 \frac{\pi^4}{L^4} cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) + a_2 \frac{\pi^4}{L^4} sen\left(\frac{\pi z}{L}\right)$$



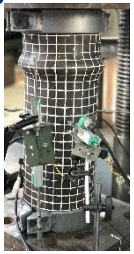
Exemplo 1

- Substituindo-se as derivadas pertinentes na ED

$$EI_x v'^v + Pv" = \omega_0 sen\left(\frac{\pi z}{L}\right) \left\{ \begin{aligned} v_p'' &= -a_1 \frac{\pi^2}{L^2} cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) - a_2 \frac{\pi^2}{L^2} sen\left(\frac{\pi z}{L}\right) \\ v_p'^v &= a_1 \frac{\pi^4}{L^4} cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) + a_2 \frac{\pi^4}{L^4} sen\left(\frac{\pi z}{L}\right) \end{aligned} \right.$$

$$EI_x \left[a_1 \frac{\pi^4}{L^4} cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) + a_2 \frac{\pi^4}{L^4} sen\left(\frac{\pi z}{L}\right) \right] + P\left[-a_1 \frac{\pi^2}{L^2} cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) - a_2 \frac{\pi^2}{L^2} sen\left(\frac{\pi z}{L}\right) \right] = \omega_0 sen\left(\frac{\pi z}{L}\right)$$

$$\boxed{EI_x a_1 \frac{\pi^4}{L^4} cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) + EI_x a_2 \frac{\pi^4}{L^4} sen\left(\frac{\pi z}{L}\right) - Pa_1 \frac{\pi^2}{L^2} cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) - Pa_2 \frac{\pi^2}{L^2} sen\left(\frac{\pi z}{L}\right) = \omega_0 sen\left(\frac{\pi z}{L}\right)}$$



Exemplo 1

- Colocando termos em evidência e desmembrando

$$sen\left(\frac{\pi z}{L}\right)\left[EI_x a_2 \frac{\pi^4}{L^4} - Pa_2 \frac{\pi^2}{L^2} - \omega_0\right] + cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)\left[EI_x a_1 \frac{\pi^4}{L^4} - Pa_1 \frac{\pi^2}{L^2}\right] = 0$$

$$sen\left(\frac{\pi z}{L}\right)\left[EI_x a_2 \frac{\pi^4}{L^4} - Pa_2 \frac{\pi^2}{L^2} - \omega_0\right] = 0 \qquad [1]$$

$$cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)\left[EI_x a_1 \frac{\pi^4}{L^4} - Pa_1 \frac{\pi^2}{L^2}\right] = 0 \qquad [2]$$

Considere em [2],

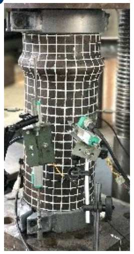
(i) $cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) = 0$ — que não é possível, $z = L/\pi$ deve ser satisfeito para todo valor de z

ou

(ii) $P = \frac{\pi^2 EI_x}{L^2}$ — mas $v \rightarrow \infty$

ou

(iii) $a_1 = 0$



Exemplo 1

- Colocando termos em evidência e desmembrando

$$sen\left(\frac{\pi z}{L}\right)\left[EI_x a_2 \frac{\pi^4}{L^4} - P a_2 \frac{\pi^2}{L^2} - \omega_0\right] = 0 \qquad [1]$$

Considere em [1],

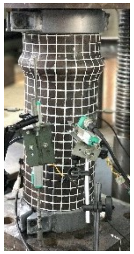
$$EI_x a_2 \frac{\pi^4}{L^4} - P a_2 \frac{\pi^2}{L^2} = \omega_0 \;\; \therefore \qquad a_2 = \frac{\omega_0}{EI_x \frac{\pi^4}{L^4} - P \frac{\pi^2}{L^2}}$$

$$\boxed{v_p = a_1 cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) + a_2 sen\left(\frac{\pi z}{L}\right) = \frac{\omega_0}{EI_x \frac{\pi^4}{L^4} - P \frac{\pi^2}{L^2}}\, sen\left(\frac{\pi z}{L}\right)}$$

- Substituindo-se na solução geral

Como $v = v_h + v_p$ e $v_h = C_1 + C_2 z + C_3 cos(\lambda z) + C_4 sen(\lambda z)$

$$v = C_1 + C_2 z + C_3 cos(\lambda z) + C_4 sen(\lambda z) + \frac{\omega_0}{EI_x \frac{\pi^4}{L^4} - P \frac{\pi^2}{L^2}}\, sen\left(\frac{\pi z}{L}\right)$$



Exemplo 1

- Fazendo-se as derivadas em relação a z

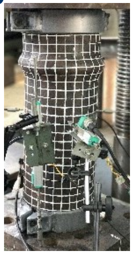
$$v = C_1 + C_2 z + C_3 cos(\lambda z) + C_4 sen(\lambda z) + \frac{\omega_0}{EI_x \frac{\pi^4}{L^4} - P\frac{\pi^2}{L^2}}\ sen\left(\frac{\pi z}{L}\right)$$

$$v' = C_2 - \lambda C_3 sen(\lambda z) + \lambda C_4 cos(\lambda z) + \frac{\omega_0}{EI_x \frac{\pi^4}{L^4} - P\frac{\pi^2}{L^2}}\ \frac{\pi}{L} cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)$$

$$v' = C_2 - \lambda C_3 sen(\lambda z) + \lambda C_4 cos(\lambda z) + \frac{\omega_0}{EI_x \frac{\pi^3}{L^3} - P\frac{\pi}{L}}\ cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)$$

$$v'' = -\lambda^2\ C_3 cos(\lambda z) - \lambda^2\ C_4 sen(\lambda z) - \frac{\omega_0}{EI_x \frac{\pi^3}{L^3} - P\frac{\pi}{L}} \frac{\pi}{L} sen\left(\frac{\pi z}{L}\right)$$

$$v'' = -\lambda^2\ C_3 cos(\lambda z) - \lambda^2\ C_4 sen(\lambda z) - \frac{\omega_0}{EI_x \frac{\pi^2}{L^2} - P} sen\left(\frac{\pi z}{L}\right)$$



Exemplo 1

- Agora satisfazendo-se as condições de contorno

(a) Em z = 0, M = 0 e $M = -EIv'' \rightarrow v'' = 0$

Portanto,

$$v'' = -\lambda^2\, C_3 \cancelto{1}{\cos(\lambda 0)} - \lambda^2\, C_4 \cancelto{0}{sen(\lambda 0)} - \frac{\omega_0}{EI_x \frac{\pi^2}{L^2} - P}\, \cancelto{0}{sen\left(\frac{\pi 0}{L}\right)} = 0$$

$$\lambda^2\, C_3 = 0 \;\therefore\; \boxed{C_3 = 0}$$ sendo $\lambda = \sqrt{P/_{EI}}$

(b) Em z = L, M = 0 e $M = -EIv'' \rightarrow v'' = 0$

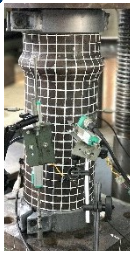
Portanto,

$$v'' = -\lambda^2\, \cancelto{0}{C_3} \cos(\lambda L) - \lambda^2\, C_4 sen(\lambda L) - \frac{\omega_0}{EI_x \frac{\pi^2}{L^2} - P}\, \cancelto{0}{sen\left(\frac{\pi L}{L}\right)} = 0$$

$$-\lambda^2\, C_4 sen(\lambda L) = 0 \; mas \; \lambda^2 \neq 0 \therefore \boxed{C_4 sen(\lambda L) = 0}$$

para $sen(\lambda L) = 0$ tem-se $(\lambda L) = \pi$ e $\mathrm{P} = EI_x \frac{\pi^2}{L^2}$ onde os deslocamentos $\rightarrow \infty$

ou $C_4 = 0$ válido para todos os valores de P exceto para $\mathrm{P} = EI_x \frac{\pi^2}{L^2}$



Exemplo 1

- Agora satisfazendo-se as condições de contorno

(c) Em z = 0, v = 0

Portanto,

$$v = C_1 + \cancelto{0}{C_2 z} + \cancelto{0}{C_3} cos(\lambda z) + \cancelto{0}{C_4} sen(\lambda z) + \frac{\omega_0}{EI_x \frac{\pi^4}{L^4} - P\frac{\pi^2}{L^2}}\, sen\left(\cancelto{0}{\frac{\pi z}{L}}\right) = 0$$

$$\boxed{C_1 = 0}$$

(d) Em z = L, v = 0

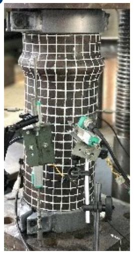
Portanto,

$$v = C_1 + C_2 L + \cancelto{0}{C_3} cos(\lambda L) + \cancelto{0}{C_4} sen(\lambda L) + \frac{\omega_0}{EI_x \frac{\pi^4}{L^4} - P\frac{\pi^2}{L^2}}\, sen\left(\cancelto{0}{\frac{\pi L}{L}}\right) = 0$$

$$\boxed{C_2 = 0}$$

Finalmente,

$$v = \frac{\omega_0}{EI_x \frac{\pi^4}{L^4} - P\frac{\pi^2}{L^2}}\, sen\left(\frac{\pi z}{L}\right) = \frac{\omega_0 \frac{L^4}{\pi^4 EI_x}\, sen\left(\frac{\pi z}{L}\right)}{\left(1 - \frac{P}{\pi^2 EI_x / L^2}\right)}$$



Exemplo 1

- Finalizando

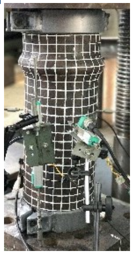
$$v = \frac{\omega_0 \frac{L^4}{\pi^4 E I_x} sen\left(\frac{\pi z}{L}\right)}{\left(1 - \frac{P}{\pi^2 E I_x / L^2}\right)} = \frac{\omega_0 \frac{L^4}{\pi^4 E I_x} sen\left(\frac{\pi z}{L}\right)}{\left(1 - \frac{P}{P_{cr,E}}\right)}$$

Nota-se que se $P = 0$ tem-se que $v = \omega_0 \frac{L^4}{\pi^4 E I_x} sen\left(\frac{\pi z}{L}\right)$

E se $P \neq 0$ tem-se que os deslocamentos crescem na proporção de $\left(1 - \frac{P}{P_{cr,E}}\right)$ vezes

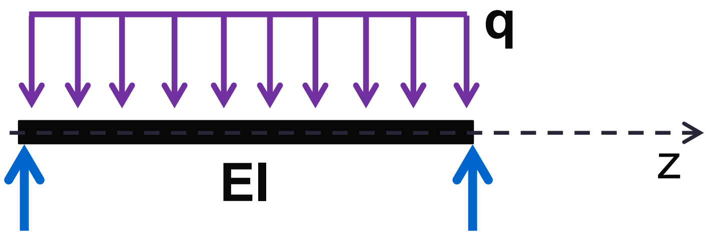
Este termo $\left(1 - \frac{P}{P_{cr,E}}\right)$ é chamado fator amplificador

Então se $P = P_{cr,E}$, os deslocamentos tornam-se infinitos, ou seja, se a coluna tem $P_{cr,E}$ aplicada, ela não suportará a introdução de cargas laterais



Exemplo 2

- Viga sujeita a carga de compressão distribuída q



$$EI_x v'^{v} = q$$

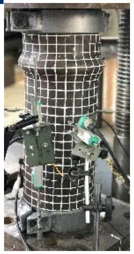
$$v_h = C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + C_4 z^3$$

$$v_p = a_1$$

Mas v_p está contida em v_h. Logo, toma-se $v_p = a_1 z^4$

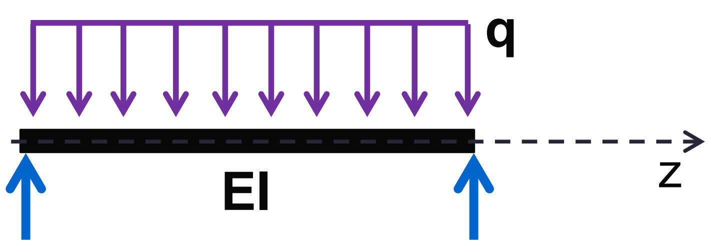
Portanto,

$$v'_p = 4a_1 z^3 \; ; \; v''_p = 12 a_1 z^2 ; v'''_p = 24 a_1 z \quad \text{e } v_p'^{v} = 24 a_1$$



Exemplo 2

- Substituindo-se na ED inicial

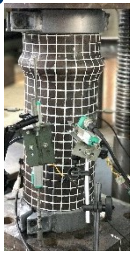


$$EI_x v'^{v} = q \text{ mas } v_p'^{v} = 24a_1$$

$$EI_x 24a_1 = q \;\; \therefore a_1 = {}^{q}/_{24EI_x}$$

$$v_p = a_1 z^4 = {}^{qz^4}/_{24EI_x}$$

$$v = v_h + v_p = C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + C_4 z^3 + {}^{qz^4}/_{24EI_x}$$



Exemplo 2

- Obtendo-se as demais derivadas

$$v = C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + C_4 z^3 + {qz^4}/{24EI_x}$$

$$v' = C_2 + 2C_3 z \quad + 3C_4 z^2 + {qz^3}/{6EI_x}$$

$$v'' = 2C_3 + 6C_4 z \quad + {qz^2}/{2EI_x}$$

- Agora aplicando as condições de contorno

(a) Em z = 0, M = 0 e $M = -EIv'' \rightarrow v''= 0$

Portanto, $v'' = 2C_3 + 6C_4 \cancelto{1}{z} + {q\cancelto{0}{z^2}}/{2EI_x} = 0 \therefore \boxed{C_3 = 0}$

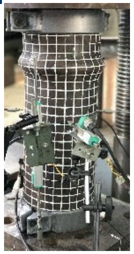
(b) Em z = L, M = 0 e $M = -EIv'' \rightarrow v''= 0$

Portanto, $v'' = 6C_4 \cancel{L} + {qL^{\cancel{2}}}/{2EI_x} = 0 \quad \therefore \boxed{C_4 = -{qL}/{12EI_x}}$

(c) Em z = 0, $v = \boxed{C_1 = 0}$

(d) Em z = L, $v = 0$

Portanto, $v = C_2 L + \left(-{qL}/{12EI_x}\right) L^3 + {qL^4}/{24EI_x} = 0 \therefore \boxed{C_2 = {qL^3}/{24EI_x}}$



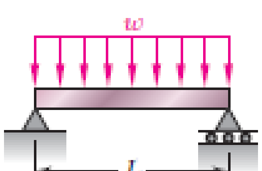
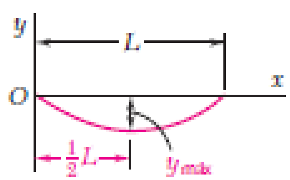
Exemplo 2

- Finalmente

$$v = C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + C_4 z^3 + {qz^4}/{24EI_x}$$

$$\boxed{v = {qL^3 z}/{24EI_x} - {qLz^3}/{12EI_x} + {qz^4}/{24EI_x} = {qz^4}/{24EI_x} - {2qLz^3}/{24EI_x} + {qL^3 z}/{24EI_x}}$$

- A partir dessa solução (deslocamentos), pode-se obter:
  - ✓ v' (tangente a elástica)
  - ✓ v'' (curvatura) para obtenção do momento: $\mathrm{M} = EI_x v''$
  - ✓ v''' para obtenção do cortante: $\mathrm{V} = EI_x v'''$
  - ✓ $v^{\prime v}$ para obtenção da carga distribuída q

Viga e carregamento	Linha elástica	Deflexão máxima	Inclinação e extremidade	Equação da linha elástica
6 		$-\frac{5wL^4}{384EI}$	$\pm\frac{wL^3}{24EI}$	$y = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$