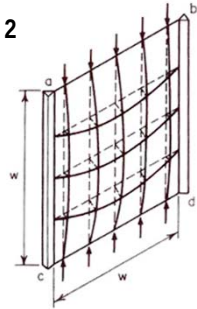




Placas – Teoria

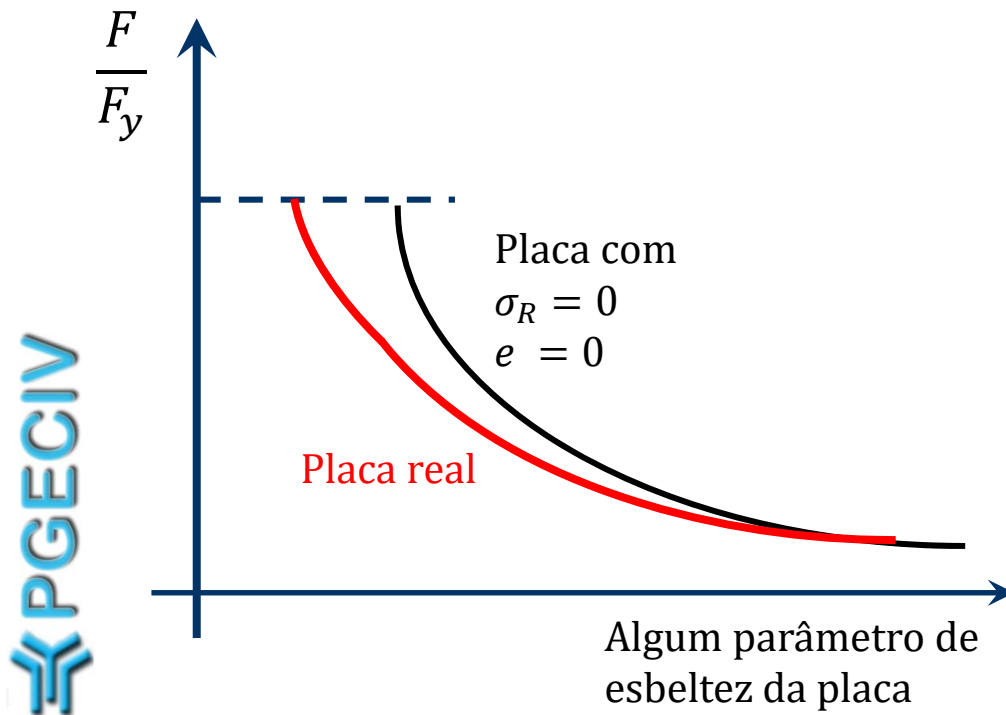


Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
PGECIV - Mestrado Acadêmico/Doutorado
Faculdade de Engenharia – FEN/UERJ
Professor: Luciano Rodrigues Ornelas de Lima

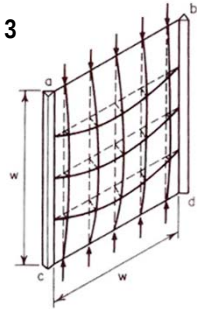


1. Flambagem de Placas

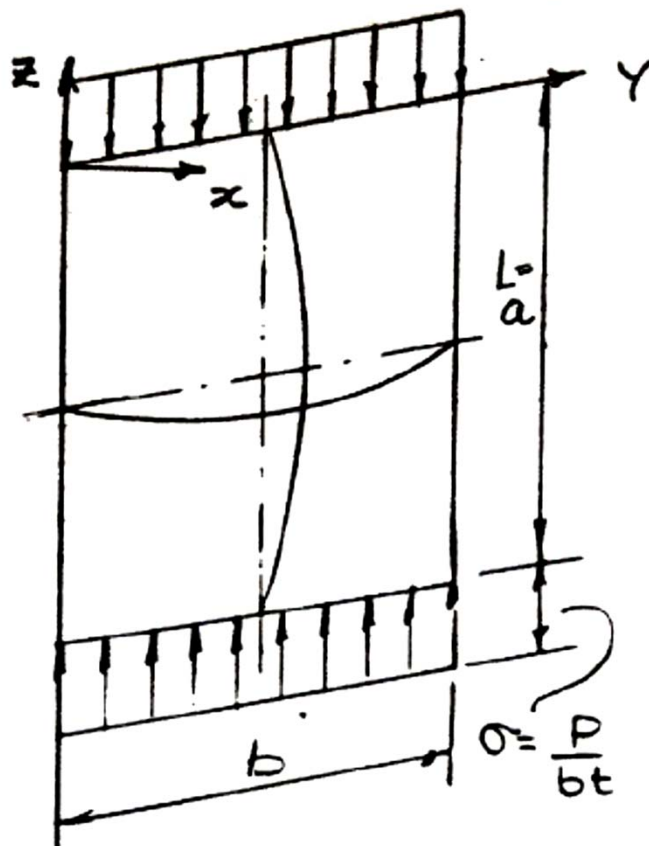
- A resistência de uma placa esbelta em compressão é dependente da esbeltez, do modulo de elasticidade, da tensão de escoamento, da presença de tensões residuais e das imperfeições iniciais



Para flambagem elástica, de forma semelhante ao comportamento de colunas, uma equação diferencial pode ser desenvolvida



1. Flambagem de Placas



Considera-se uma placa apoiada nos quatro bordos
→ sem translação nem deslocamentos para fora do plano

Condições de contorno possíveis →



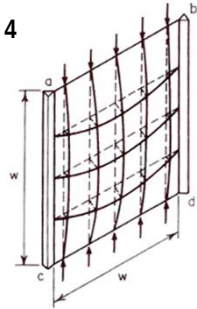
Fixa p/ translações e rotações



Fixa p/ translações (apoio simples)



Livre

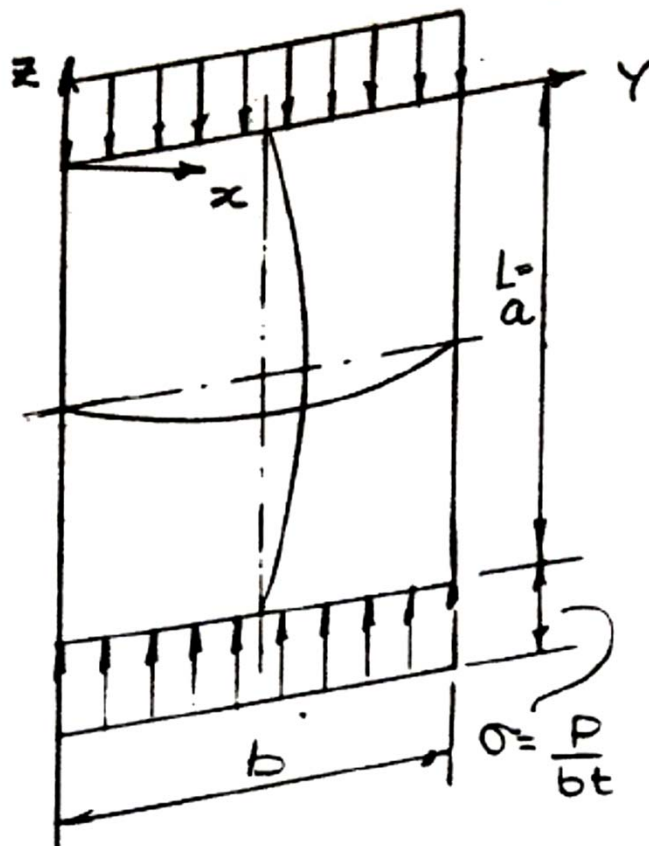


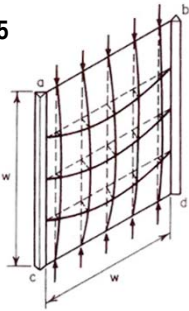
1. Flambagem de Placas

A razão a/b é chamada de razão de aspecto

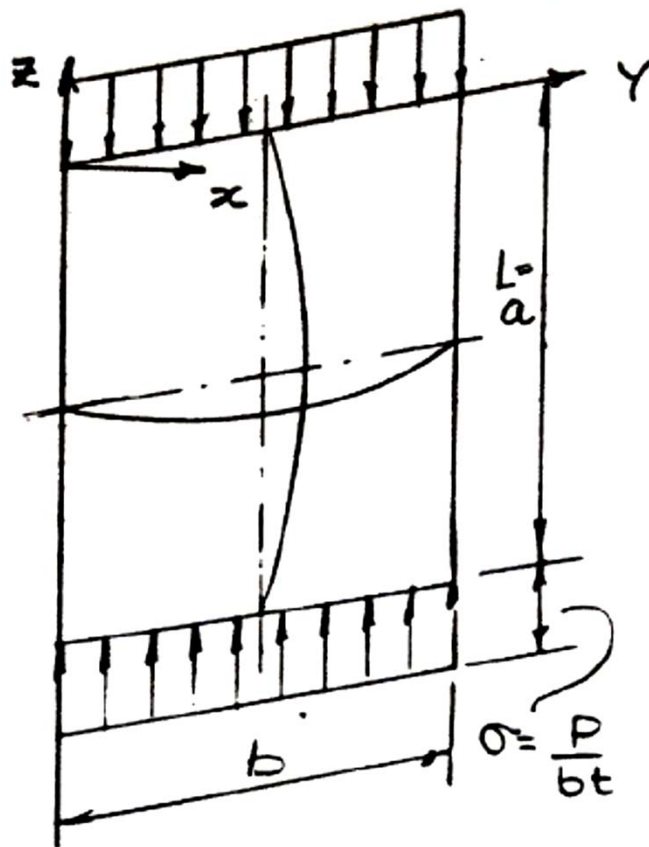
Alguns autores definem esta razão de forma inversa, ou seja, b/a que tende a zero para placas muito longas e a 1 para placas quadradas

Quando a tensão crítica é atingida na placa, a mesma pode flambar como mostrado





1. Flambagem de Placas



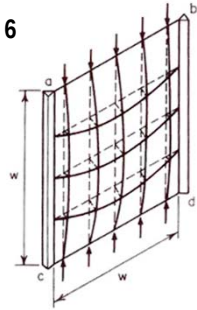
Para a flambagem de uma coluna (ver aula de ED), tem-se $EI_x v'''' + Pv'' = 0$

Já para a flambagem de uma placa. A ED é da seguinte forma

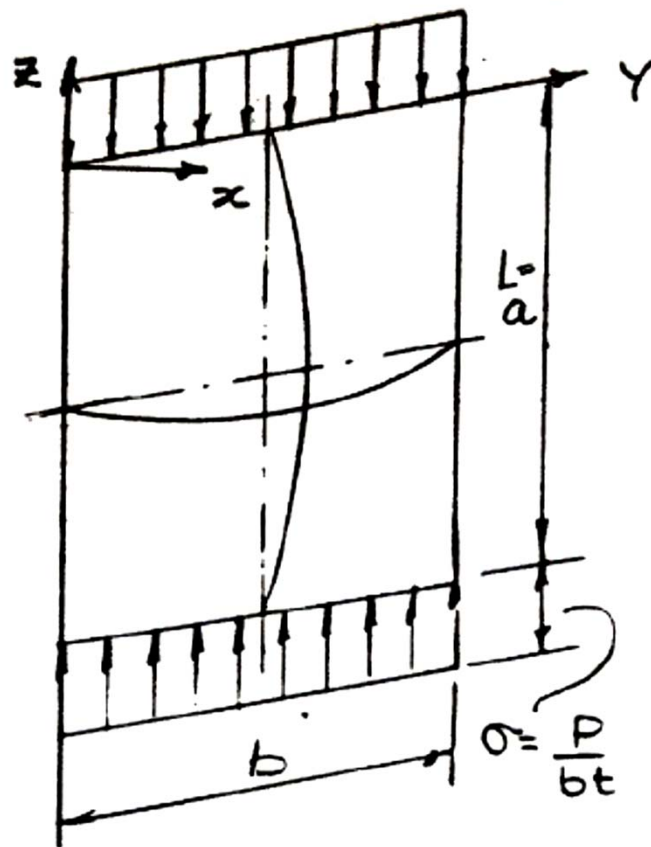
$$bD \left(\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{2\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + P \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

onde D é a rigidez à flexão da placa

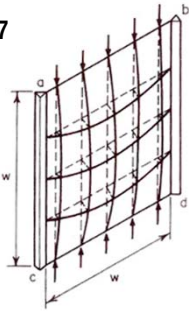
$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \therefore bD = \frac{Ebt^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{EI}{(1-\nu^2)}$$



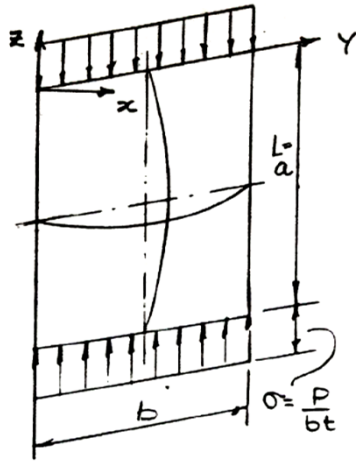
1. Flambagem de Placas



O termo $(1 - \nu^2)$ aparece devido a condição de deformações uniaxiais que existem e pelo fato de a placa, quando comprimida na direção z , estar restringida contra a expansão lateral devido a largura da mesma. A tensão na direção y vale $\nu \sigma_z$



1. Flambagem de Placas



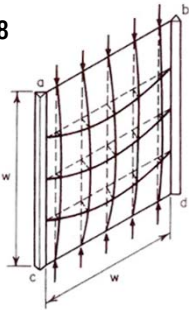
$$bD \left(\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{2\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + P \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

corresponde a $Pv'' \rightarrow$
efeito da carga distribuída

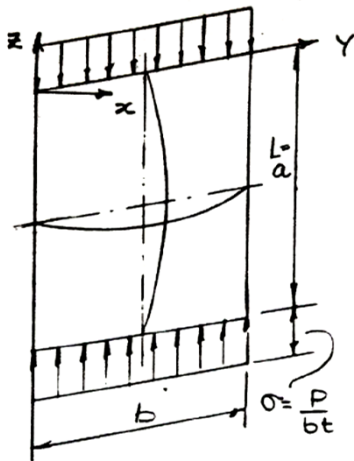
flexão longitudinal $\equiv EI_x v''v$
para uma coluna

resistência à flexão lateral da
placa que não existe em colunas

resistência à torção da placa
também não existindo em
colunas



1. Flambagem de Placas



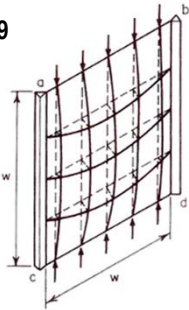
A solução para satisfazer as condições de contorno de uma placa simplesmente apoiada nas quatro faces pode ser obtida pela superposição de duas séries

$$u = A_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{a}$$

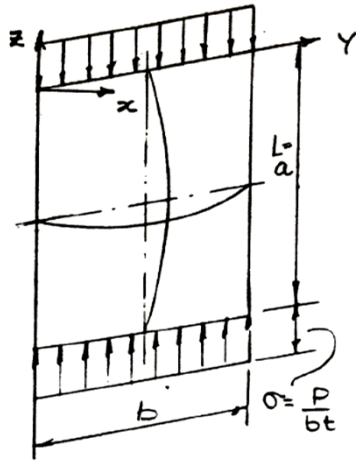
sendo m e $n \rightarrow$ número de meias ondas de seno nas direções x e y

Então, tem-se que

$$P = \frac{n^2 \pi^2 b D}{L^2} \left[1 + 2 \left(\frac{mL}{nb} \right)^2 + \left(\frac{mL}{nb} \right)^4 \right]$$



1. Flambagem de Placas



Como a tensão $\sigma = \frac{P}{bt}$ e $m = 1$ para a deformada da figura, tem-se

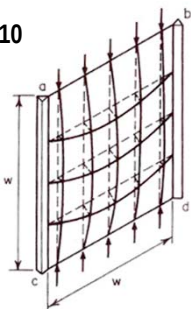
$$\sigma = \frac{P}{bt} = \frac{1}{bt} \frac{n^2 \pi^2 b D}{L^2} \left[1 + 2 \left(\frac{mL}{nb} \right)^2 + \left(\frac{mL}{nb} \right)^4 \right]$$

$$\sigma = \frac{P}{bt} = \frac{n^2 \pi^2 b \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}}{L^2} \bigg/ bt \left[1 + \frac{2L^2}{n^2 b^2} + \frac{L^4}{n^4 b^4} \right]$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2) \left(\frac{b}{t} \right)^2} k \quad \text{onde } k = \frac{n^2 b^2}{L^2} \left[1 + \frac{2L^2}{n^2 b^2} + \frac{L^4}{n^4 b^4} \right]$$

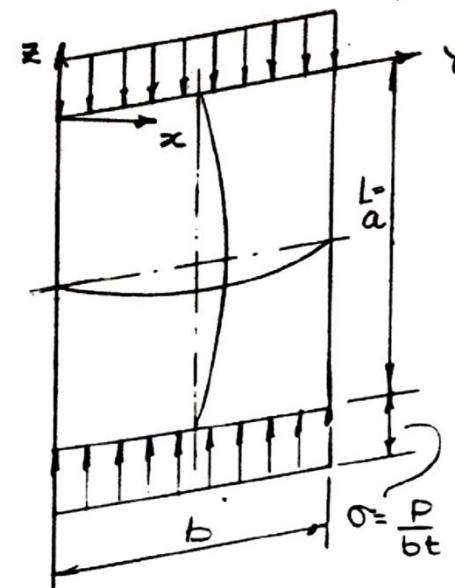
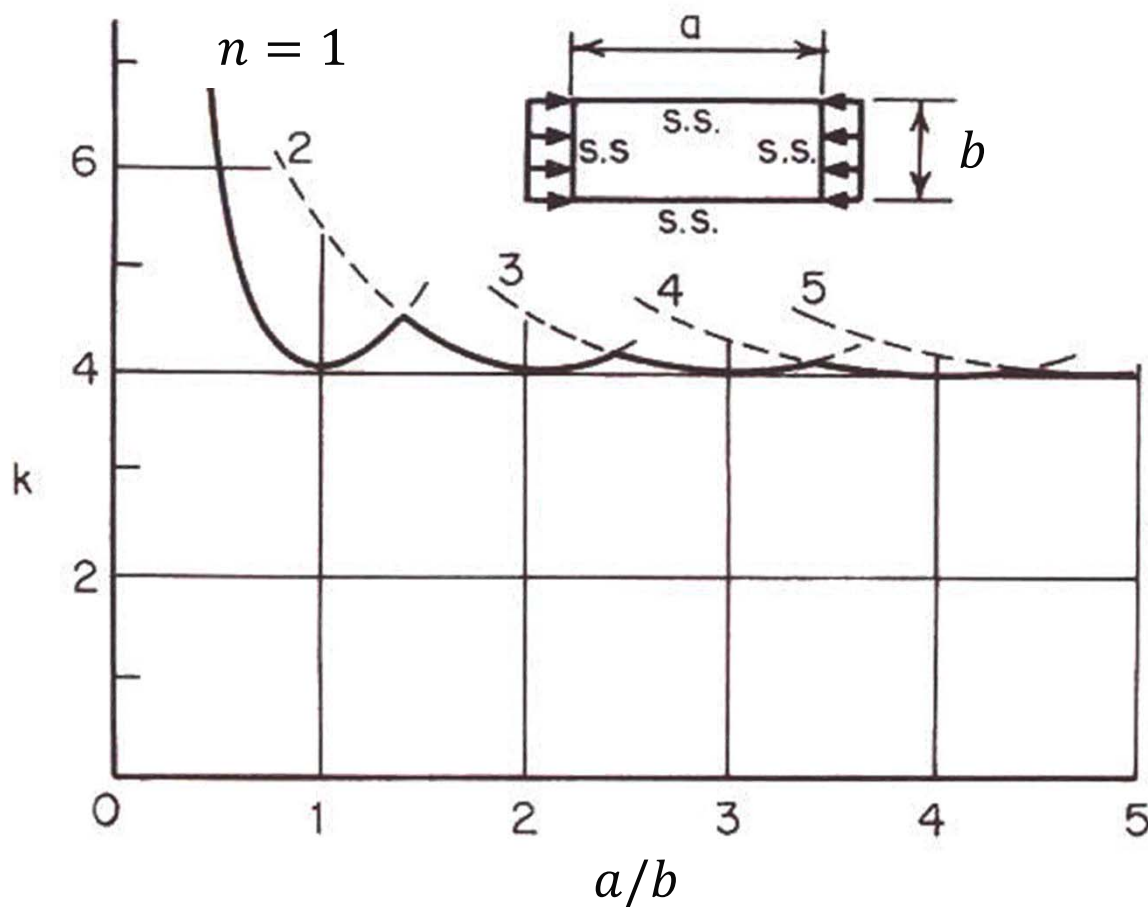
$$k = \left[\frac{n^2 b^2}{L^2} + 2 + \frac{L^2}{n^2 b^2} \right]$$

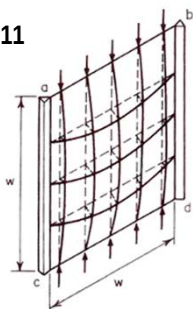
onde n é o número de mais ondas ao longo do comprimento da placa



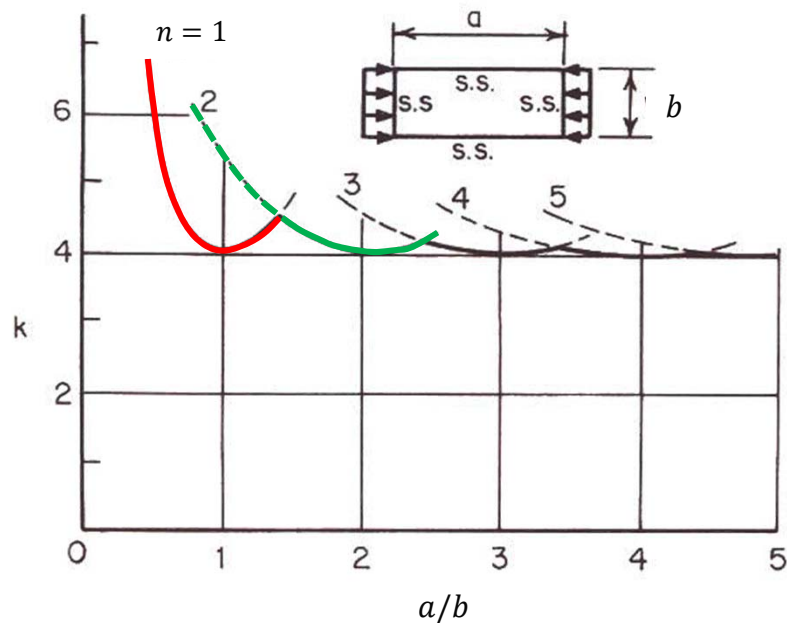
1. Flambagem de Placas

Para uma dada razão b/t , a σ_{cr} depende de k

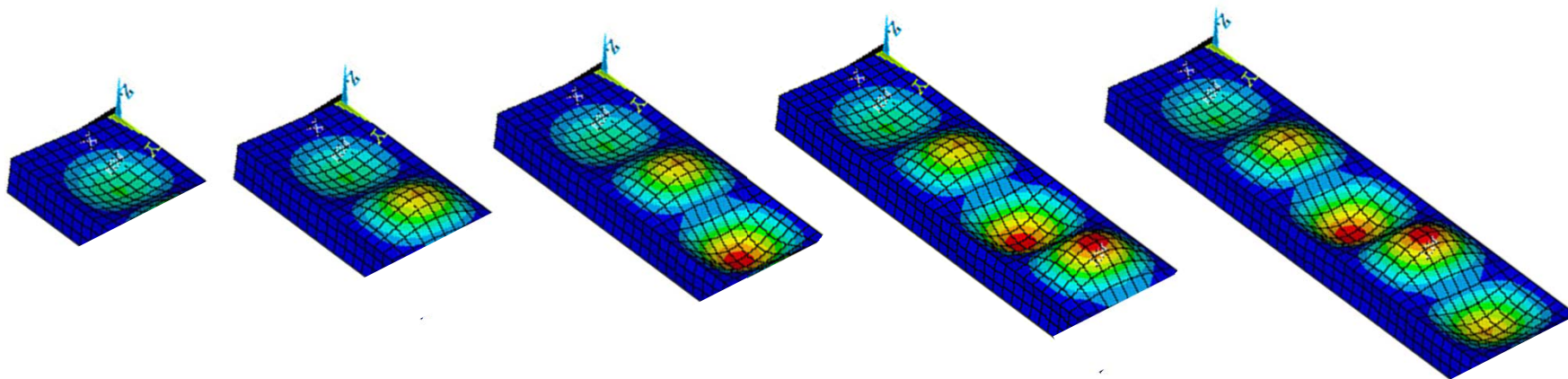


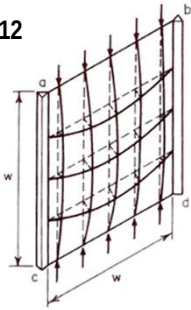


1. Flambagem de Placas

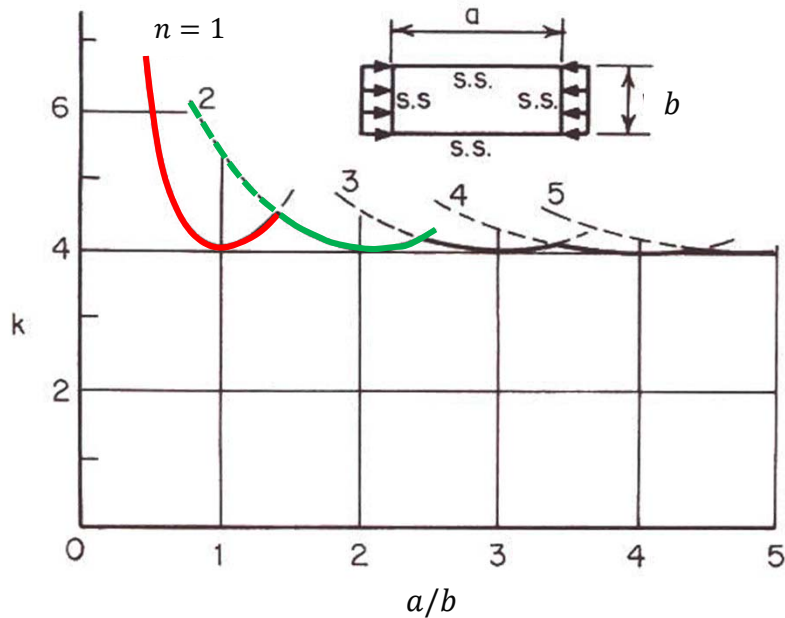


- Começando com uma placa relativamente curta, a placa sofre flambagem com uma semi-onda
- Com o aumento de a/b , diminui-se a σ_{cr} até a razão $a/b = 1$ correspondente a uma placa quadrada com $k = 4 \rightarrow$ e a seguir, aumenta-se a σ_{cr} até o limite de $a/b = \sqrt{2}$
- A partir deste ponto, a placa flamba com duas semi-ondas e σ_{cr} diminui novamente até um mínimo de 4 quando $a/b = 2$.

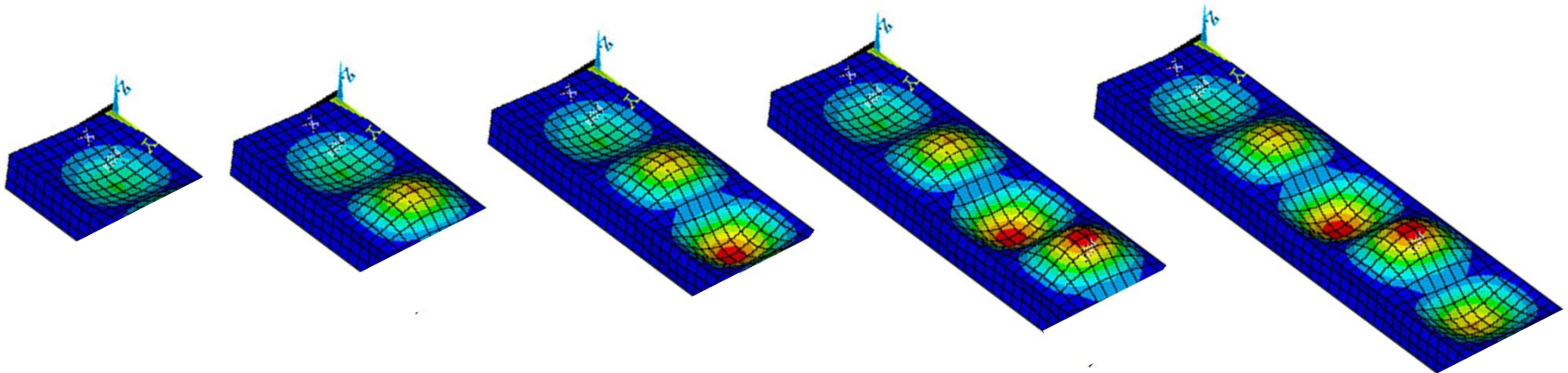


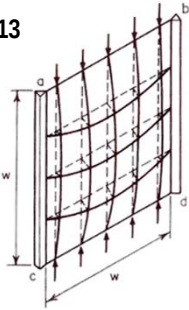


1. Flambagem de Placas



- $k_{\min}$ ocorre quando a/b é um inteiro e as semi-ondas formam um "quadrado" → a semi-onda transversal tem o mesmo comprimento da longitudinal
- Este é o modo de flambagem mais fácil de ser desenvolvido para níveis baixos de σ_{cr}
- Por outro lado, para placas longas → flambagem com uma mesma σ_{cr} mas com mais semi-ondas





1. Flambagem de Placas

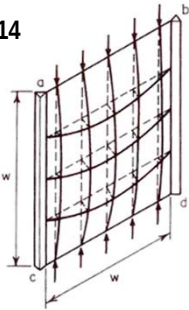
- Partindo-se da $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 Ek}{12(1-\nu^2)(b/t)^2}$ e dividindo-se ambos os termos por σ_y

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} = \frac{\pi^2 Ek}{12(1-\nu^2)(b/t)^2} \frac{1}{\sigma_y}$$

- Para $\sigma_{cr}/\sigma_y = 1 \rightarrow$ a placa não flamba até que σ_y seja atingida com $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$ e $k = k_{\min} = 4$

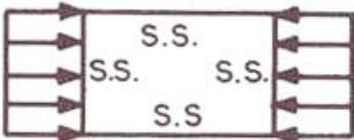
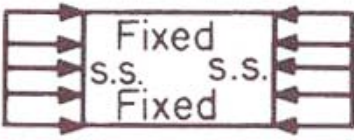
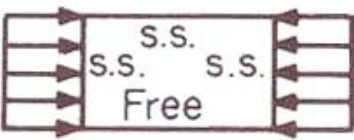
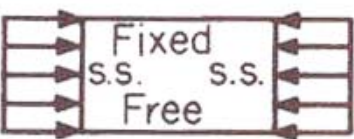
$$\frac{b}{t} = \sqrt{\frac{\pi^2 Ek_{\min}}{12(1-\nu^2)\sigma_y}} = \frac{850}{\sqrt{\sigma_y}} = \frac{850}{\sqrt{\sigma_y}} \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{200000}} \rightarrow \boxed{\frac{b}{t} = 1,90 \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}}}$$

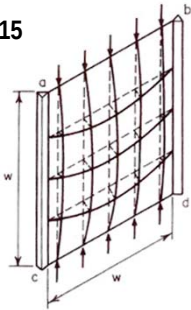
- Cada norma tem valores específicos de b/t limites para que se atinja a tensão de escoamento σ_y do material



1. Flambagem de Placas

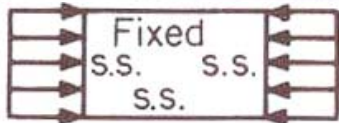
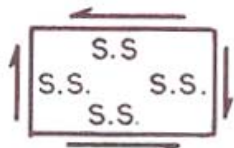
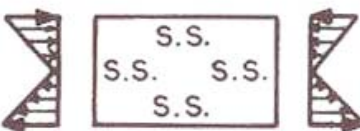
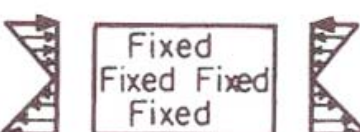
- Para outras condições de contorno, tem-se diferentes valores teóricos de k

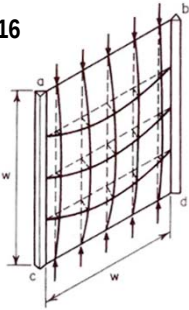
Case	Boundary condition	Type of stress	Value of k for long plate
(a)		Compression	4.0
(b)		Compression	6.97
(c)		Compression	0.425
(d)		Compression	1.277



1. Flambagem de Placas

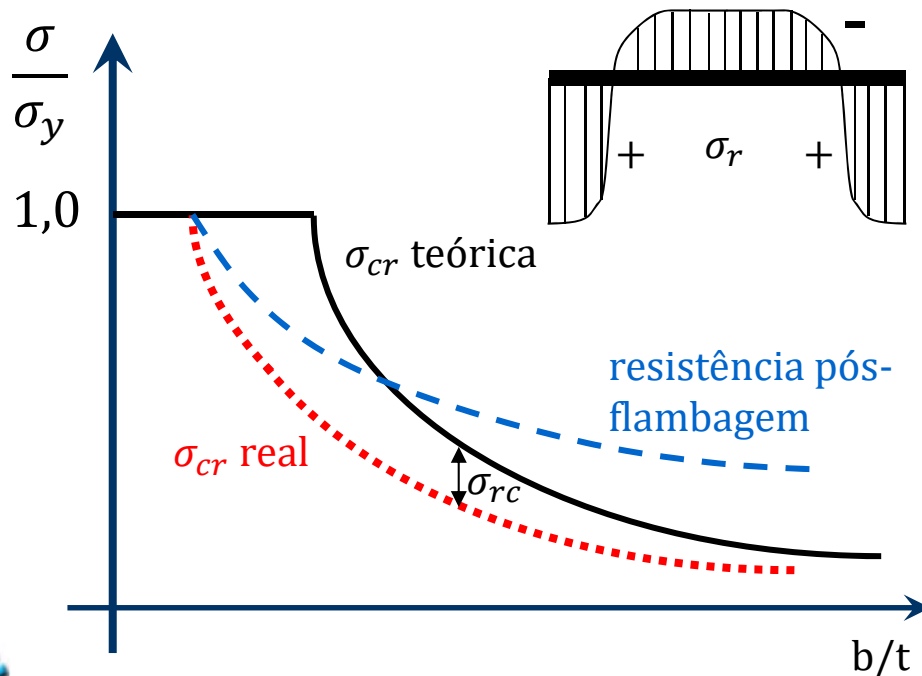
- Para outras condições de contorno, tem-se diferentes valores teóricos de k

Case	Boundary condition	Type of stress	Value of k for long plate
(e)		Compression	5.42
(f)		Shear	5.34
(g)		Shear	8.98
(h)		Bending	23.9
(i)		Bending	41.8

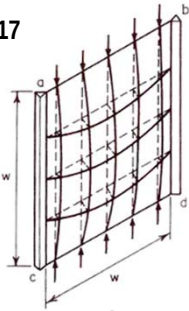


2. Flambagem Inelástica e Resistência Pós-Flambagem

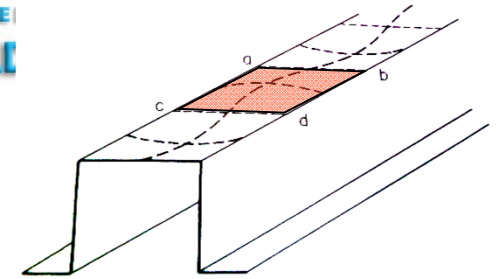
- Em ensaios, verifica-se que σ_y não é atingida para um valor de b/t devido às σ_{rc} e imperfeições geométricas iniciais
- σ_{rc} também reduz a σ_{cr} porque se prolonga para parte da largura onde a flambagem não se verifica



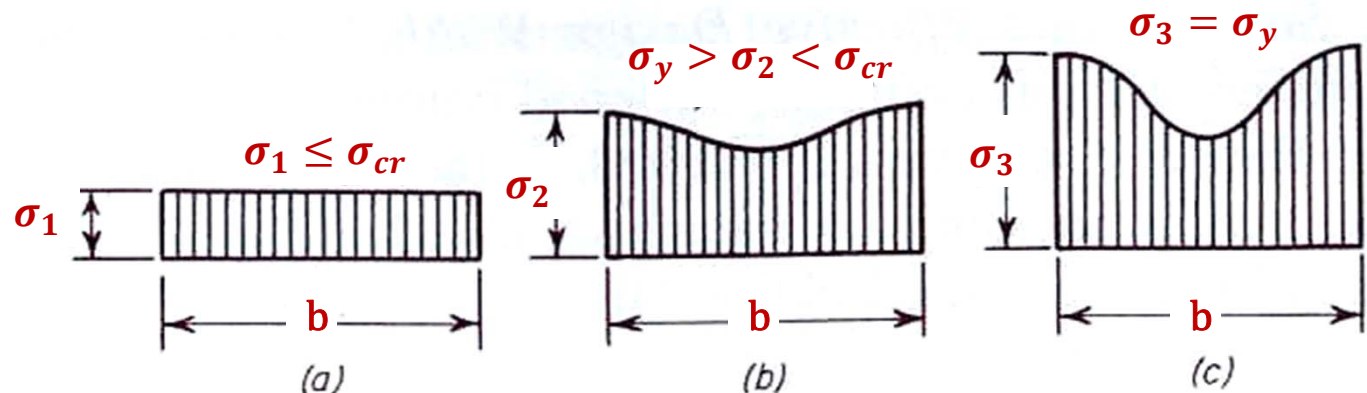
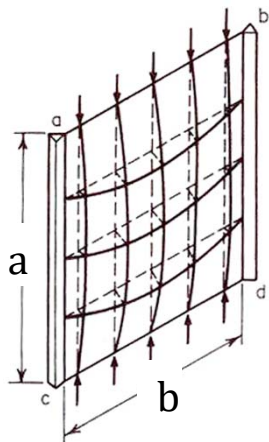
- Atingir a σ_{cr} não significa que a placa atinge a falha porque áreas próximas aos apoios podem suportar mais carga e atingirem $\sigma_y \rightarrow$ **resistência pós-flambagem**



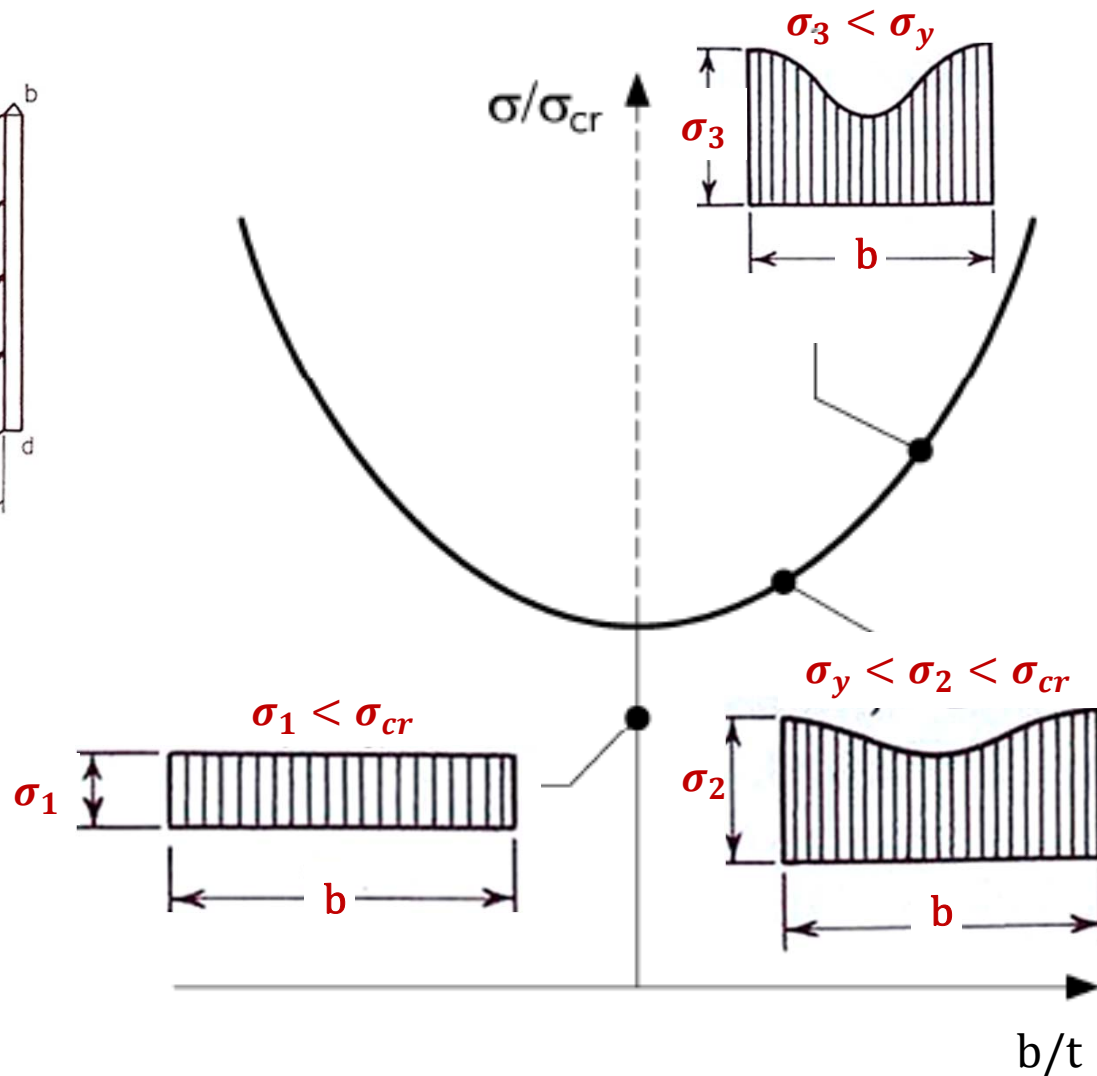
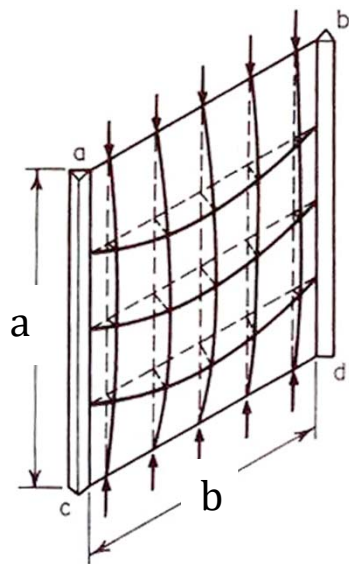
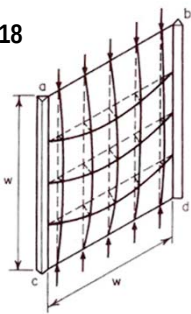
2. Flambagem Inelástica e Resistência Pós-Flambagem

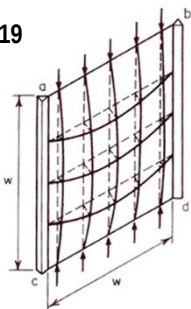


- Tensões uniformes até o momento da flambagem ($\sigma < \sigma_{cr}$)
- Início da flambagem $\rightarrow$ barras horizontais $\rightarrow$ diminuir o aumento de deflexões
- Após ocorrer a flambagem $\rightarrow$ parte da carga no centro da placa transfere-se para as extremidades $\rightarrow$ tensões não uniformes $\rightarrow$ a redistribuição de tensões continua até que nas extremidades $\rightarrow \sigma_y$ (escoamento) $\rightarrow$ falha da placa $\rightarrow$ **Teoria de Grandes Deslocamentos**

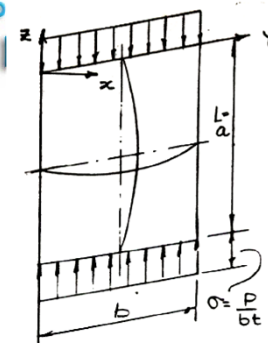


2. Flambagem Inelástica e Resistência Pós-Flambagem





3. Conceito de Largura Efetiva



- von Karman em 1910

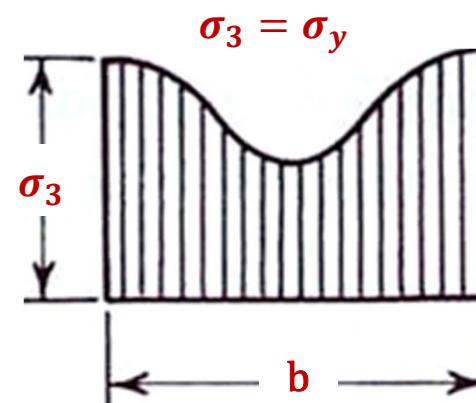
$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{2\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) = \frac{t}{D} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

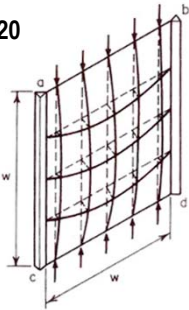
onde F é a função de tensões na fibra média da placa e

$$f_z \text{ ou } \sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad f_y \text{ ou } \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \quad \tau_{yz} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}$$

Resolução complexa para aplicação em projeto →

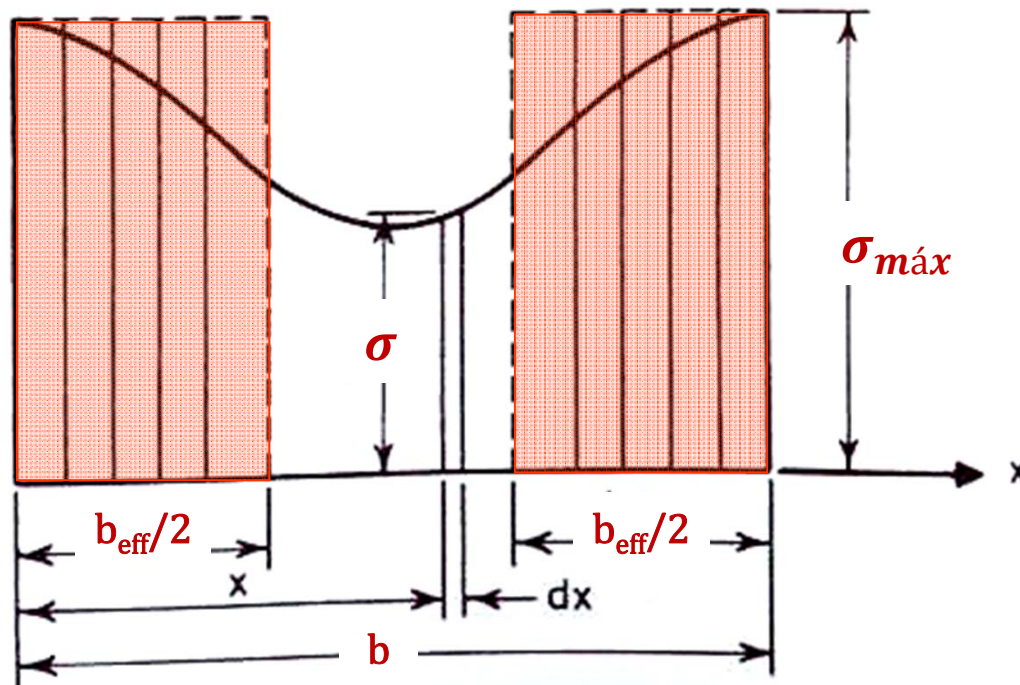
introdução do conceito de largura efetiva



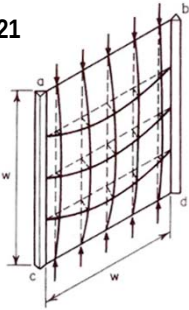


3. Conceito de Largura Efetiva

- Largura $b \rightarrow$ tensões não uniformes
- Largura fictícia “efetiva” $b_{eff} \rightarrow$ tensões uniformes $\rightarrow \sigma_{máx}$ na extremidade



$$\int_0^b \sigma dx = b_{eff} \sigma_{máx}$$



3. Conceito de Largura Efetiva

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma_y = \frac{\pi^2 Ek}{12(1 - \nu^2) \left(b_{eff}/t\right)^2} \therefore b_{eff}/t = \sqrt{\frac{\pi^2 Ek}{12(1 - \nu^2)\sigma_y}}$$

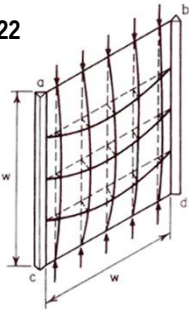
$$b_{eff} = t\pi \sqrt{\frac{Ek}{12(1 - \nu^2)\sigma_y}} \therefore b_{eff} = \frac{\sqrt{k}\pi}{\sqrt{12(1 - \nu^2)}} t \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}}$$

e ent\~ao $b_{eff} = Ct \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}}$ onde $C = \frac{\sqrt{k}\pi}{\sqrt{12(1 - \nu^2)}}$

Logo, se $k = 4$, tem-se que $C = 1,9$ que fornece

$$b_{eff} = 1,9t \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}}$$

Eq. de von Karman (1932)



3. Conceito de Largura Efetiva

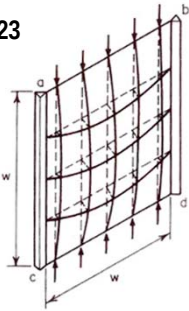
Lembrando que $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 Ek}{12(1-\nu^2)(b/t)^2}$ tem-se que $\frac{b_{eff}}{b} = \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y}}$

E definindo o índice de esbeltez normalizada $\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_{cr}}} = \frac{1,052}{\sqrt{k}} \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}}$

$$\bar{\lambda}_p = \frac{b/t}{28,4\epsilon\sqrt{k}}$$

$$\text{com } \epsilon = \sqrt{235/\sigma_y}$$

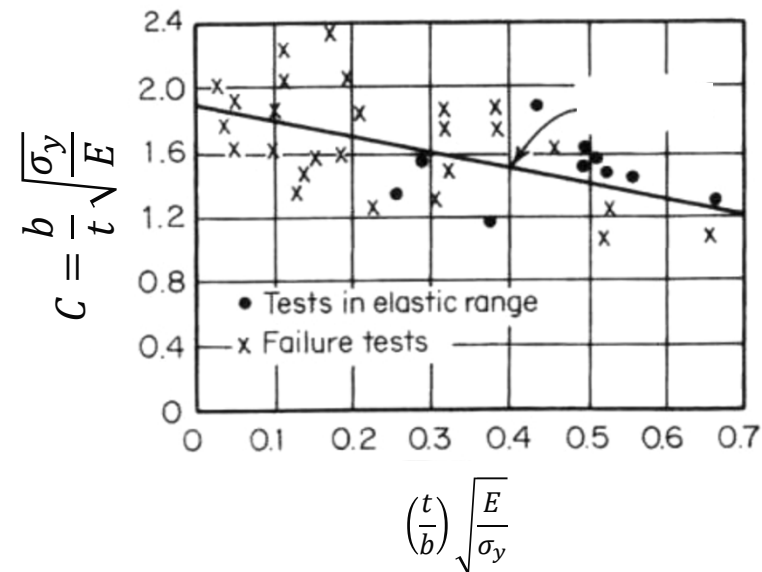
E finalmente, $b_{eff} = \rho b$ e $\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\bar{\lambda}_p} \leq 1$



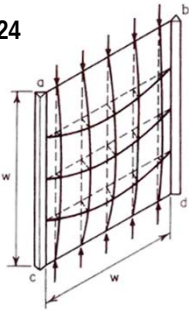
3. Conceito de Largura Efetiva

- O valor de C do slide 21 foi definido como 1,9 para placas simplesmente apoiadas $k = 4$ para placas longas
- Para placas com valores intermediários de $b/t \rightarrow$ eq. de Winter (1946)

$$C = 1,9 \left[1 - 0,415 \left(\frac{t}{b} \right) \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}} \right]$$

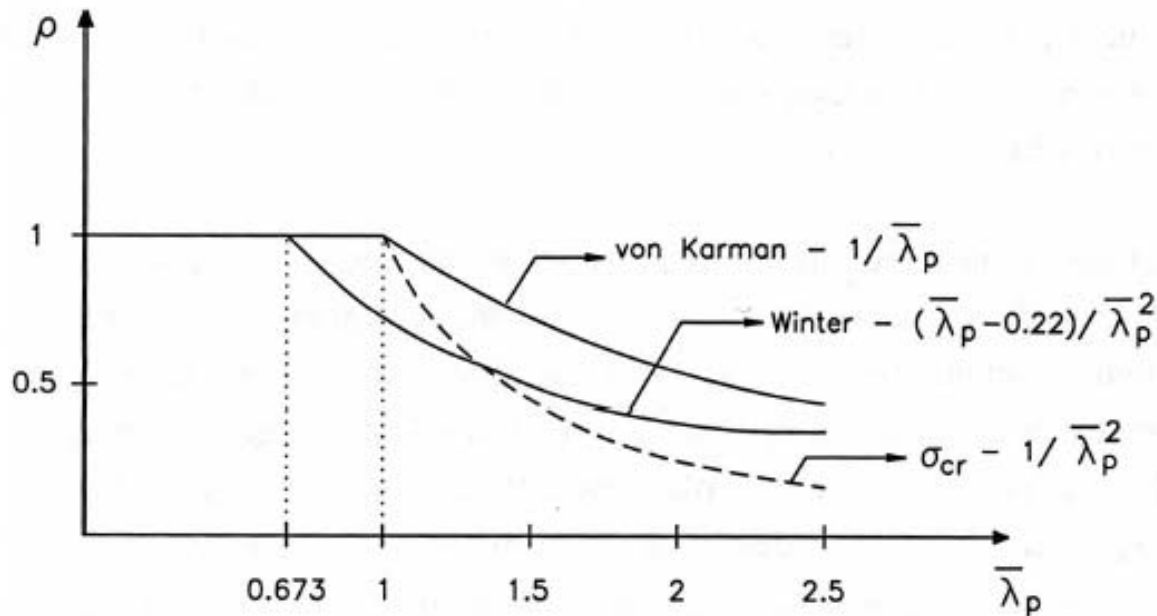


- E como $\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y}} \left(1 - 0,22 \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y}} \right) \leq 1$ ou em termos do índice de esbeltez normalizado $\bar{\lambda}_p \rightarrow \rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\bar{\lambda}_p} \left(1 - \frac{0,22}{\bar{\lambda}_p} \right)$

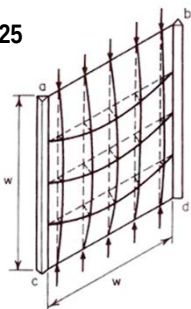


3. Conceito de Largura Efetiva

- A largura efetiva depende da tensão máxima $\sigma_{máx}$ na face e da razão $\frac{b}{t}$
- A largura será totalmente efetiva quando ρ for igual a 1 $\rightarrow b = b_{eff}$
- Sendo assim, pode-se verificar isso acontece para $\bar{\lambda}_p = 0,673$ ou $\frac{b}{t} < \left(\frac{b}{t}\right)_{lim} = 16,69 \varepsilon \sqrt{k}$ com $\varepsilon = \sqrt{235/\sigma_y}$

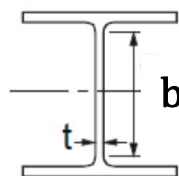
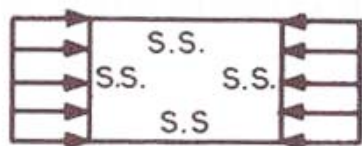


$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\bar{\lambda}_p} \left(1 - \frac{0,22}{\bar{\lambda}_p} \right)$$



3. Conceito de Largura Efetiva

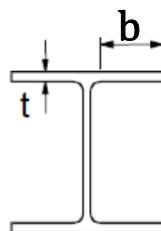
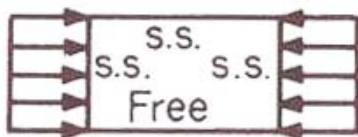
- Finalmente, substituindo-se em $\left(\frac{b}{t}\right)_{lim} = 16,69 \varepsilon \sqrt{k}$ com $\varepsilon = \sqrt{235/\sigma_y}$, tem-se
- para $k = 4 \rightarrow$ placa simplesmente apoiada $\rightarrow$ almas de vigas (enrijecidas)



$$\left(\frac{b}{t}\right)_{lim} = 33,38\varepsilon \rightarrow \left(\frac{b}{t}\right)_{lim} = 34\varepsilon \text{ (no EC3)}$$

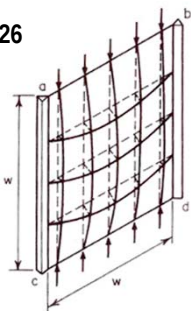
classe 2

- para $k = 0,425 \rightarrow$ placa apoiada e livre $\rightarrow$ mesas de vigas (não enrijecidas)

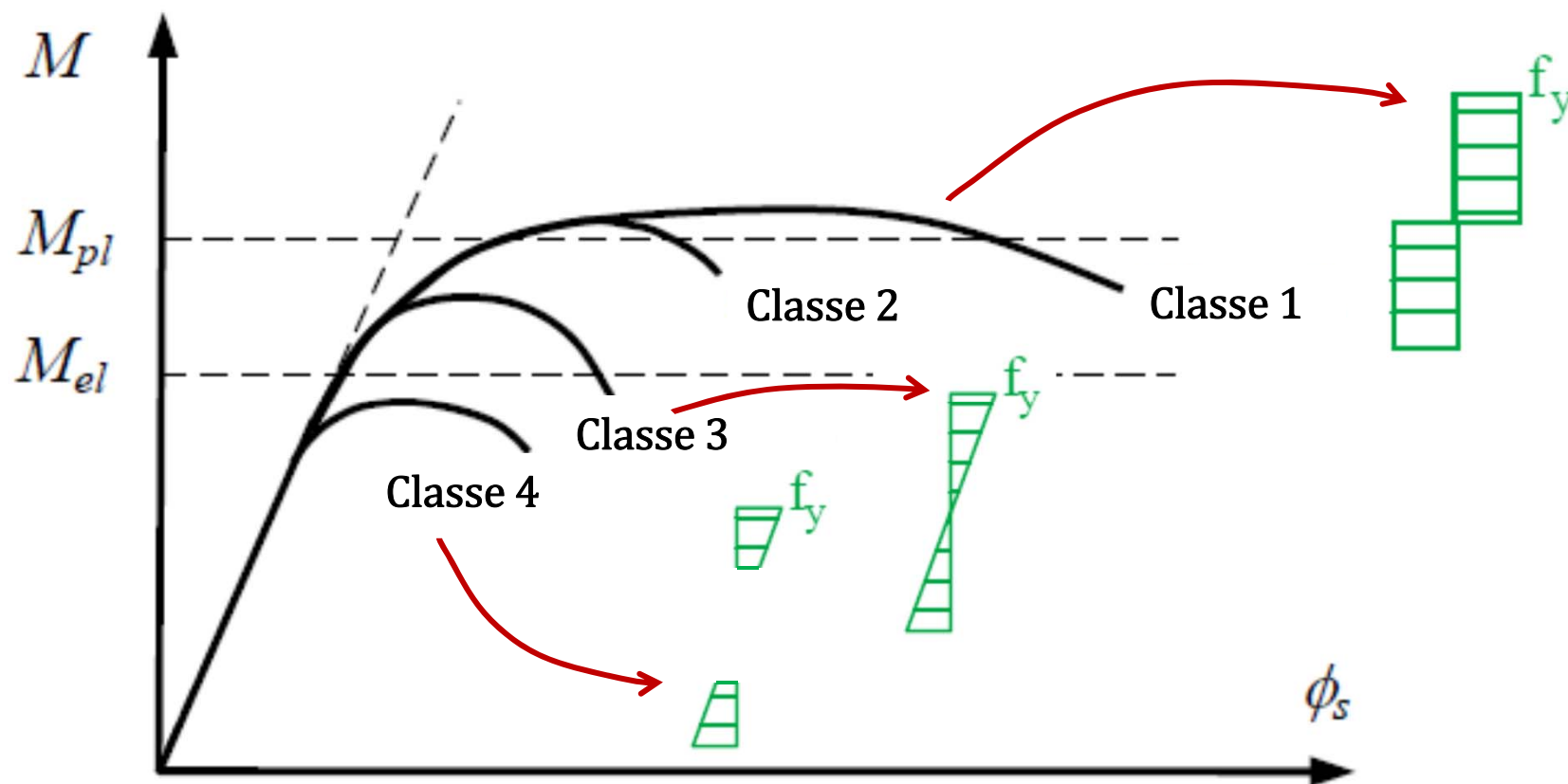


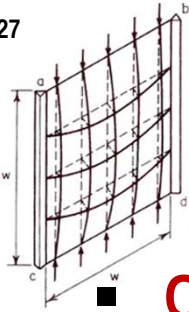
$$\left(\frac{b}{t}\right)_{lim} = 10,9\varepsilon \rightarrow \left(\frac{b}{t}\right)_{lim} = 10\varepsilon \text{ (no EC3)}$$

classe 2



3. Conceito de Largura Efetiva





3. Conceito de Largura Efetiva

- **Classe 1** → seções → uma rótula plástica com uma capacidade de rotação necessária para o desenvolvimento de uma análise plástica sem redução da resistência
- **Classe 2** → seções → uma rótula plástica mas com uma capacidade de rotação limitada devido a flambagem local
- **Classe 3** → seções → escoamento na fibra extrema comprimida do elemento de aço → distribuição elástica de tensões → flambagem local impedirá → desenvolvimento do momento plástico da seção
- **Classe 4** → seções → flambagem local ocorre antes do escoamento em uma ou mais partes da seção transversal → seções efetivas