

# Vigas

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Mestrado Acadêmico / Doutorado

Faculdade de Engenharia – FEN/UERJ

Professor: Luciano Rodrigues Ornelas de Lima



# 1. Introdução

- Vigas → componente estrutural mais básico

Table 1 - Typical beam types for various applications.

Beam Type	Span Range (m)	Notes
0. Angles	3 - 6	used for roof purlins, sheeting rails, etc., where only light loads have to be carried.
1. Cold-formed sections	4 - 8	used for roof purlins, sheeting rails, etc., where only light loads have to be carried.
2. Rolled Sections UB, IPE, UPN, HE	1 - 30	most frequently used type of section; proportions selected to eliminate several possible types of failure.
3. Open web joists	4 - 40	prefabricated using angles or tubes as chords and round bars for web diagonals; used in place of rolled sections.
4. Castellated beams	6 - 60	used for long spans and/or light loads, depth of UB increased by 50%, web openings may be used for services, etc.
5. Compound sections e.g. IPE + UPN	5 - 15	used when a single rolled section would not provide sufficient capacity; can also provide enhanced horizontal bending strength.
6. Plate girders	10 - 100	made by welding together 3 plates, sometimes automatically; web depth up to 3-4m sometimes need stiffening.
7. Box girders	15 - 200	fabricated from plate, usually stiffened; used for OHT cranes and bridges due to good torsional and transverse stiffness properties.

# 1. Introdução

## ■ Materiais Eurocode 3 – Revisão 2021

Steel grade <sup>a</sup>	Nominal thickness of the element <i>t</i> mm			
	<i>t</i> ≤ 40 mm		40 mm < <i>t</i> ≤ 80 mm	
	<i>f<sub>y</sub></i> N/mm <sup>2</sup>	<i>f<sub>u</sub></i> N/mm <sup>2</sup>	<i>f<sub>y</sub></i> N/mm <sup>2</sup>	<i>f<sub>u</sub></i> N/mm <sup>2</sup>
S235	235	360	215	360
S275	275	390	245	370
S355	355	490	325	470
S420	420	510	390	490
S460	460	540	410	510
S500	500	580	450	580
S550	550	600	500	600
S600	600	650	550	650
S620	620	700	560	660
S650	650	700	-	-
S690	690	770	630	710
S700	700	750	-	-

novos



# 1. Introdução

- Vigas travadas x vigas não travadas lateralmente
- Não ocorre FLT:
  - ✓ flexão em torno do seu eixo de menor inércia;
  - ✓ contraventada lateralmente → elementos estruturais de aço secundários, por uma laje de concreto ou por qualquer outro método que previna o deslocamento lateral das partes comprimidas da seção transversal;
  - ✓ a seção transversal da viga → elevada rigidez à torção e uma rigidez à flexão semelhante nos dois eixos principais → seções transversais tubulares fechadas

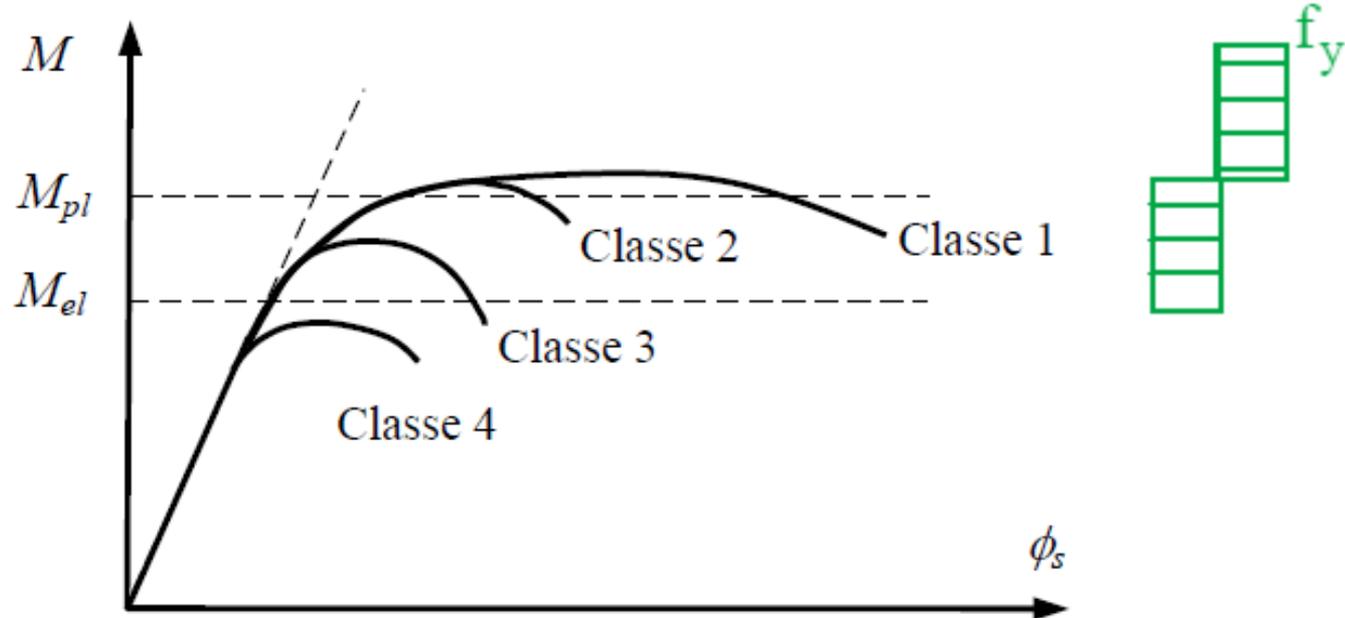


## 2. Resistência

- Resistência plástica → seção compacta (classe 1 ou 2), se for contraventada lateralmente e for feita com um material de comportamento dúctil → aço carbono comum
- Seções transversais esbeltas (seção classe 3 ou 4) → a resistência à flexão deve ser baseada na sua resistência elástica

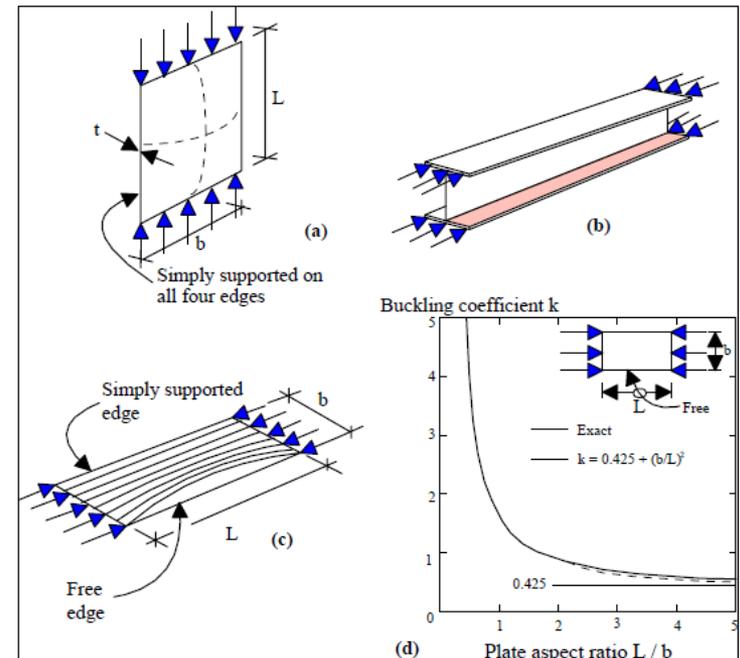
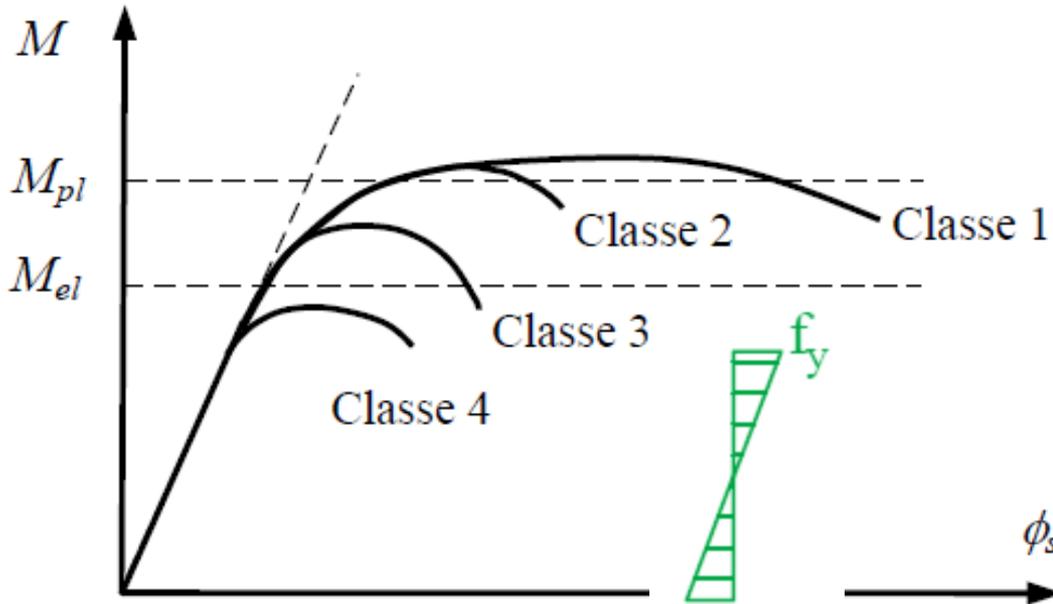
## 2. Classificação da Seção

- Classe 1 → seções → uma rótula plástica com uma capacidade de rotação necessária para o desenvolvimento de uma análise plástica sem redução da resistência
- Classe 2 → seções → uma rótula plástica mas com uma capacidade de rotação limitada devido a flambagem local

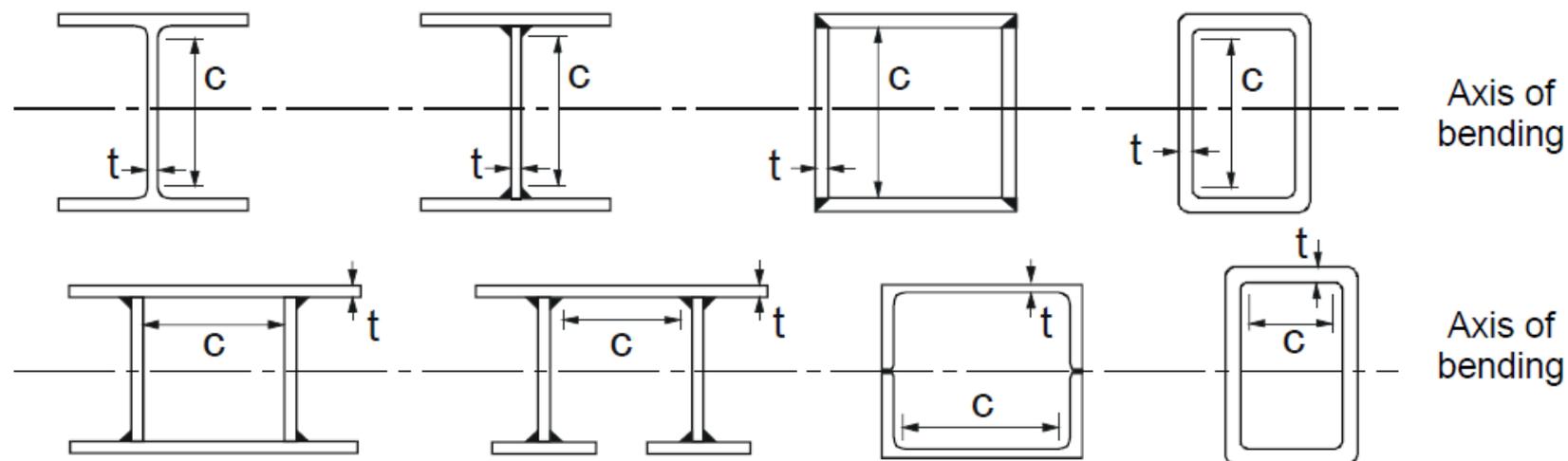


# 2. Classificação da Seção

- Classe 3 → seções → escoamento na fibra extrema comprimida do elemento de aço → distribuição elástica de tensões → flambagem local impedirá → desenvolvimento do momento plástico da seção
- Classe 4 → seções → flambagem local ocorre antes do escoamento em uma ou mais partes da seção transversal → seções efetivas (ver aula de placas)

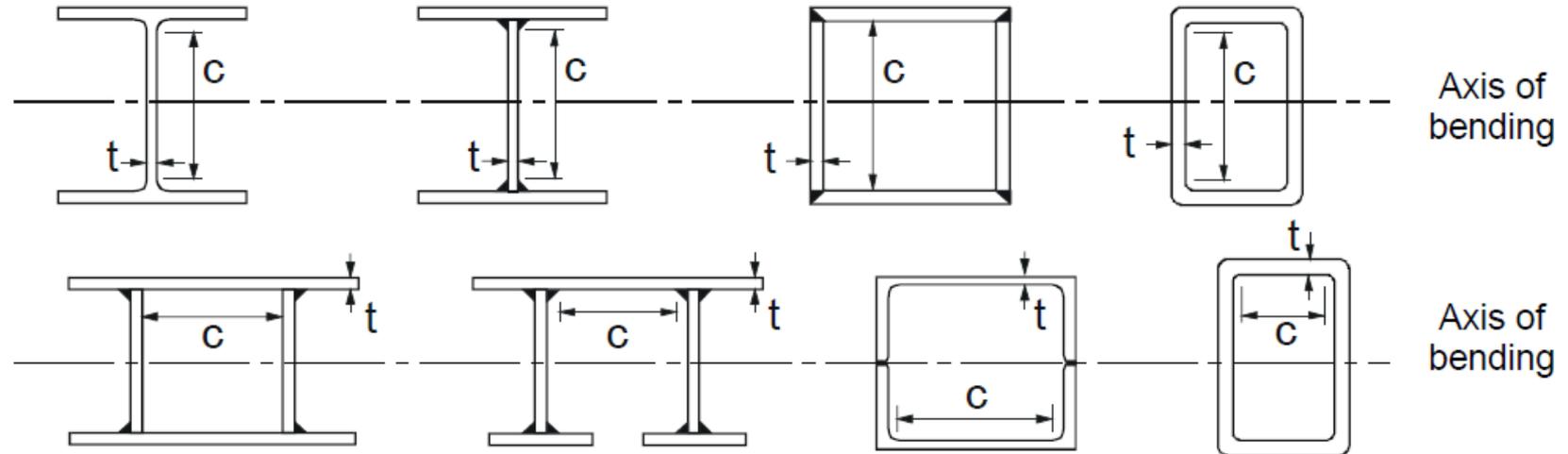


## Internal compression parts



Class	Part subject to bending	Part subject to compression	Part subject to bending and compression
Stress distribution in parts (compression positive)			
1	$c/t \leq 72\varepsilon$	$c/t \leq 33\varepsilon$	when $\alpha > 0,5$ : $c/t \leq \frac{396\varepsilon}{13\alpha - 1}$ when $\alpha \leq 0,5$ : $c/t \leq \frac{36\varepsilon}{\alpha}$
2	$c/t \leq 83\varepsilon$	$c/t \leq 38\varepsilon$	when $\alpha > 0,5$ : $c/t \leq \frac{456\varepsilon}{13\alpha - 1}$ when $\alpha \leq 0,5$ : $c/t \leq \frac{41,5\varepsilon}{\alpha}$

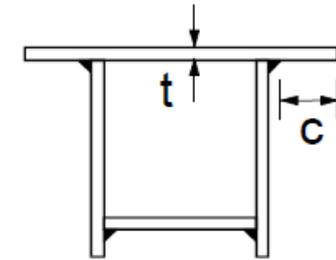
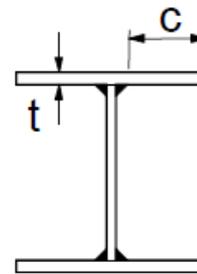
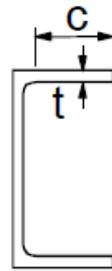
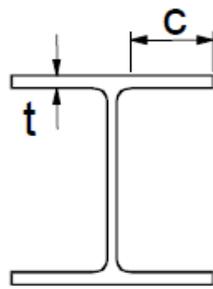
### Internal compression parts



Class	Part subject to bending	Part subject to compression	Part subject to bending and compression			
Stress distribution in parts (compression positive)						
3	$c/t \leq 124\varepsilon$	$c/t \leq 42\varepsilon$	when $\psi > -1$ : $c/t \leq \frac{42\varepsilon}{0,67 + 0,33\psi}$ when $\psi \leq -1^*)$ : $c/t \leq 62\varepsilon(1 - \psi)\sqrt{-\psi}$			
$\varepsilon = \sqrt{235/f_y}$	$f_y$	235	275	355	420	460
	$\varepsilon$	1,00	0,92	0,81	0,75	0,71

\*)  $\psi \leq -1$  applies where either the compression stress  $\sigma \leq f_y$  or the tensile strain  $\varepsilon_y > f_y/E$

## Outstand flanges

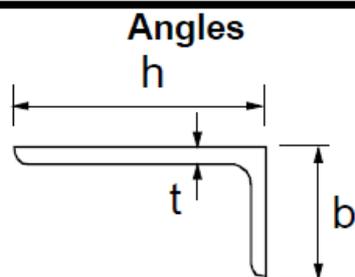


Rolled sections

Welded sections

Class	Part subject to compression	Part subject to bending and compression				
		Tip in compression	Tip in tension			
Stress distribution in parts (compression positive)						
1	$c/t \leq 9\varepsilon$	$c/t \leq \frac{9\varepsilon}{\alpha}$	$c/t \leq \frac{9\varepsilon}{\alpha\sqrt{\alpha}}$			
2	$c/t \leq 10\varepsilon$	$c/t \leq \frac{10\varepsilon}{\alpha}$	$c/t \leq \frac{10\varepsilon}{\alpha\sqrt{\alpha}}$			
Stress distribution in parts (compression positive)						
3	$c/t \leq 14\varepsilon$	$c/t \leq 21\varepsilon\sqrt{k_{\sigma}}$ For $k_{\sigma}$ see EN 1993-1-5				
$\varepsilon = \sqrt{235/f_y}$	$f_y$	235	275	355	420	460
	$\varepsilon$	1,00	0,92	0,81	0,75	0,71

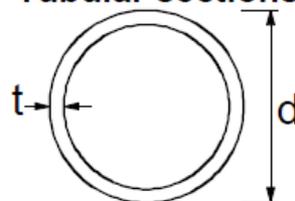
Refer also to "Outstand flanges"  
(see sheet 2 of 3)



Does not apply to angles in  
continuous contact with other  
components

Class	Section in compression
Stress distribution across section (compression positive)	
3	$h/t \leq 15\varepsilon: \frac{b+h}{2t} \leq 11,5\varepsilon$

### Tubular sections

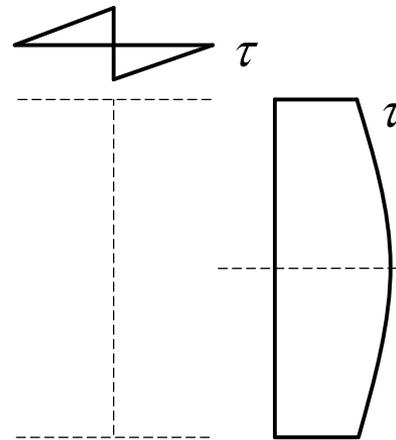
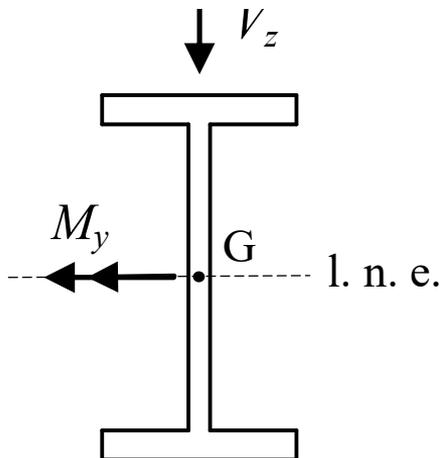


Class	Section in bending and/or compression
1	$d/t \leq 50\varepsilon^2$
2	$d/t \leq 70\varepsilon^2$
3	$d/t \leq 90\varepsilon^2$
<b>NOTE</b> For $d/t > 90\varepsilon^2$ see EN 1993-1-6.	

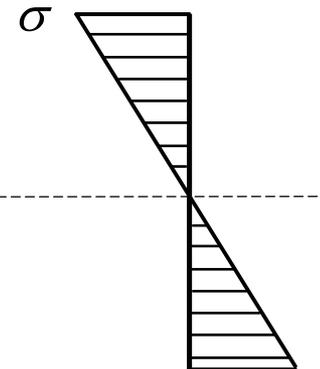
$\varepsilon = \sqrt{235/f_y}$	$f_y$	235	275	355	420	460
	$\varepsilon$	1,00	0,92	0,81	0,75	0,71
	$\varepsilon^2$	1,00	0,85	0,66	0,56	0,51

# 3. Resistência

- A alma da viga é responsável pela maior parte da resistência ao cisalhamento
- Conservadoramente  $\rightarrow$  tensões cisalhantes  $\rightarrow$  distribuídas uniformemente  $\rightarrow$  altura da alma  $\rightarrow$  contribuição das mesas  $\rightarrow$  desprezada



*Tensões de cisalhamento -  $\tau$*



*Tensões normais -  $\sigma$*

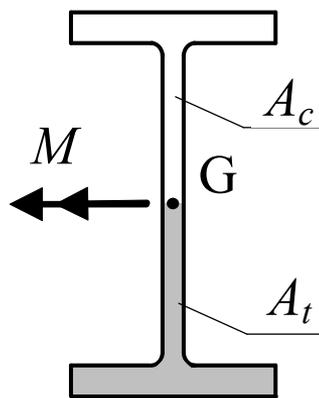
### 3. Resistência

- Seção submetida à flexão e cisalhamento → a resistência à flexão pode ser reduzida para levar em conta a presença simultânea do cisalhamento
- Seções I ou H e seções tubulares retangulares → usuais → vigas → características de alta rigidez e resistência à flexão em torno do eixo de maior inércia

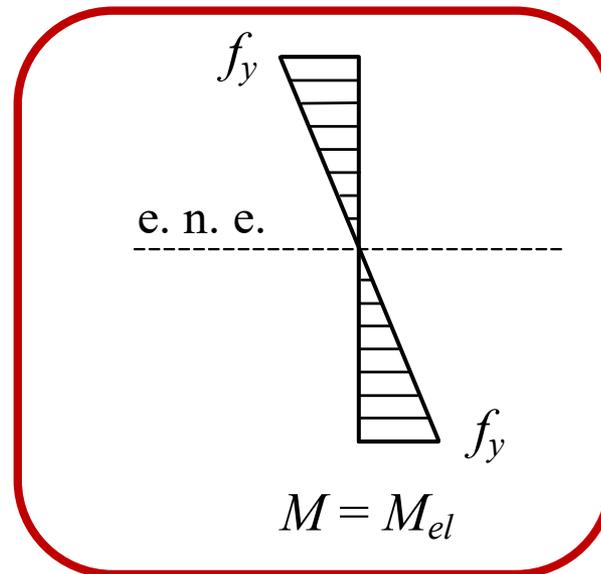


## 3. Dimensionamento

- Regimes elástico e plástico
- A resistência elástica da seção transversal a flexão  
 → tensão normal, no ponto mais distante da linha neutra elástica → tensão de escoamento  $f_y$
- momento fletor elástico →  $M_{el}$

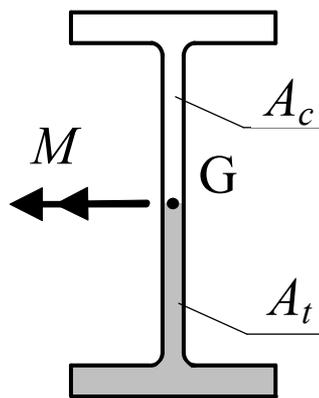


Seção I ou H

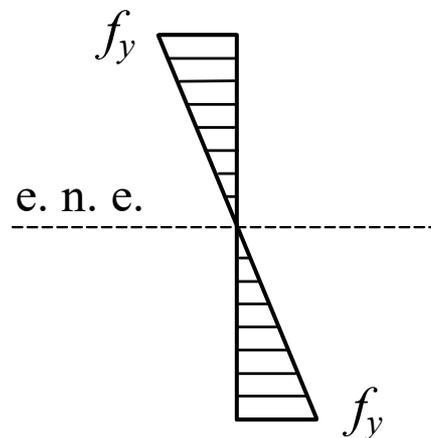


## 3. Dimensionamento

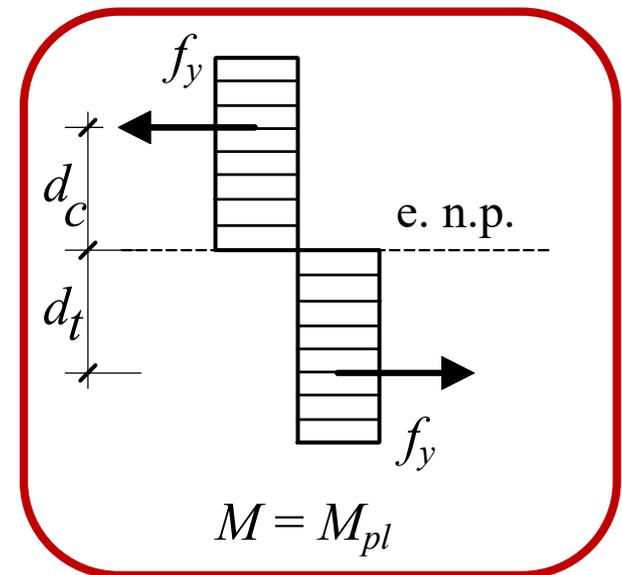
- Regimes elástico e plástico
- Momento fletor capaz de plastificar totalmente a seção transversal
- Momento fletor plástico  $\rightarrow M_{pl}$



Seção I ou H



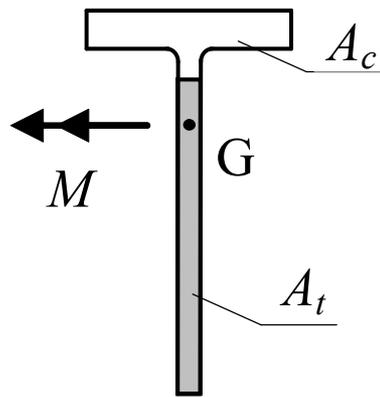
$$M = M_{el}$$



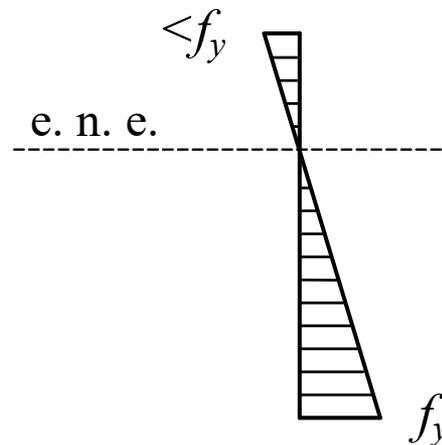
$$M = M_{pl}$$

### 3. Dimensionamento

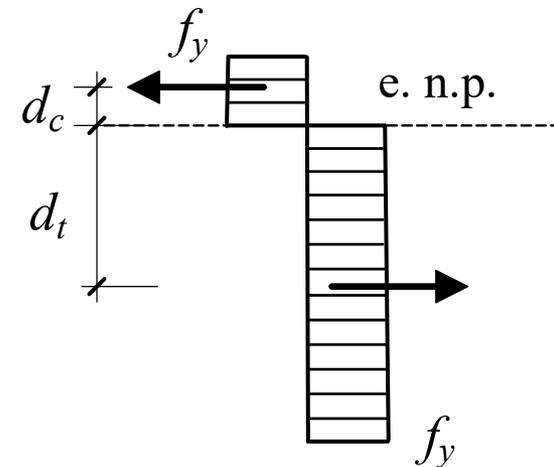
- Seções transversais assimétricas → seção T → a linha neutra move-se para dividir a seção em duas partes com áreas iguais



Seção T



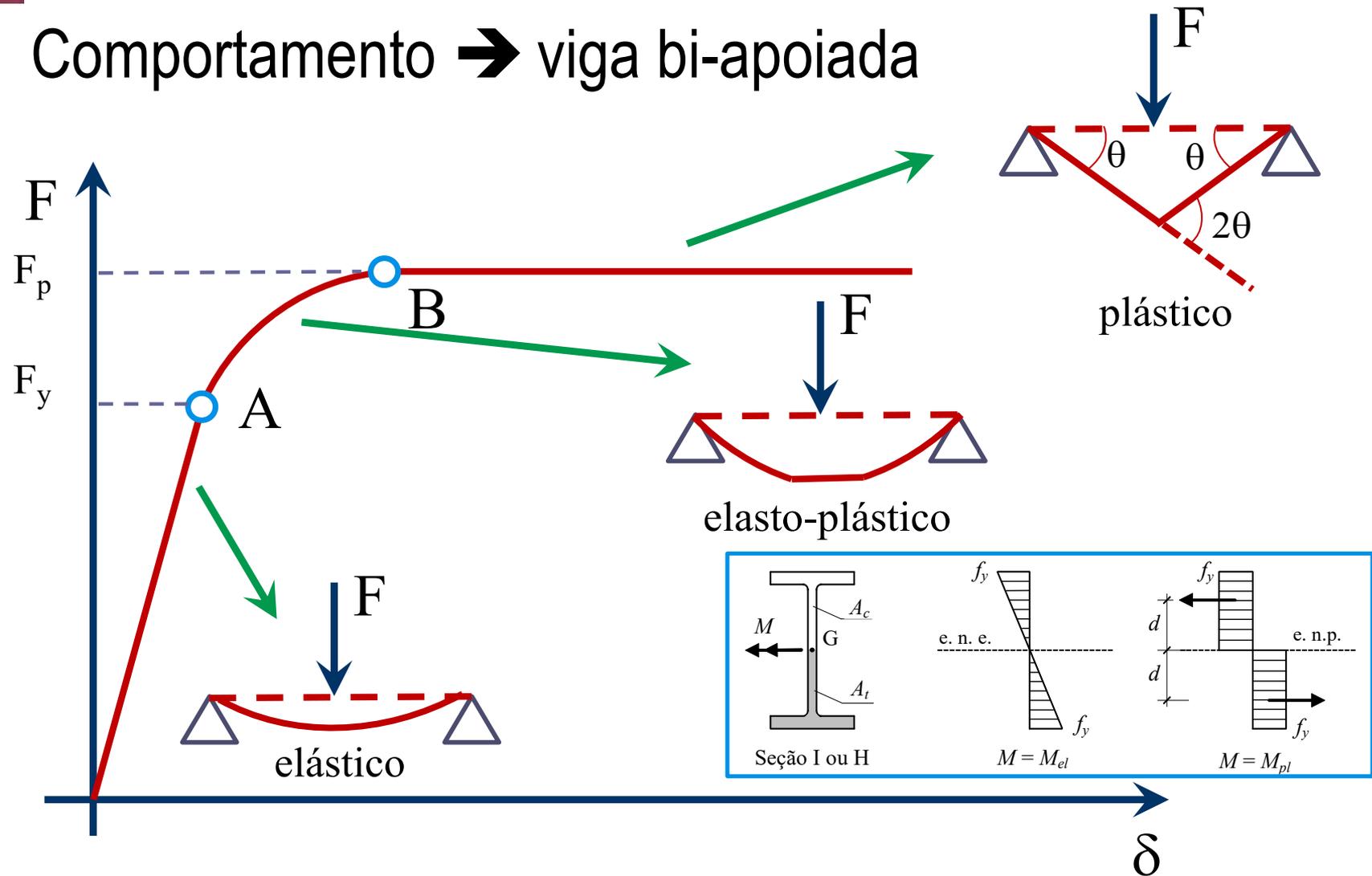
$$M = M_{el}$$



$$M = M_{pl}$$

# 3. Dimensionamento

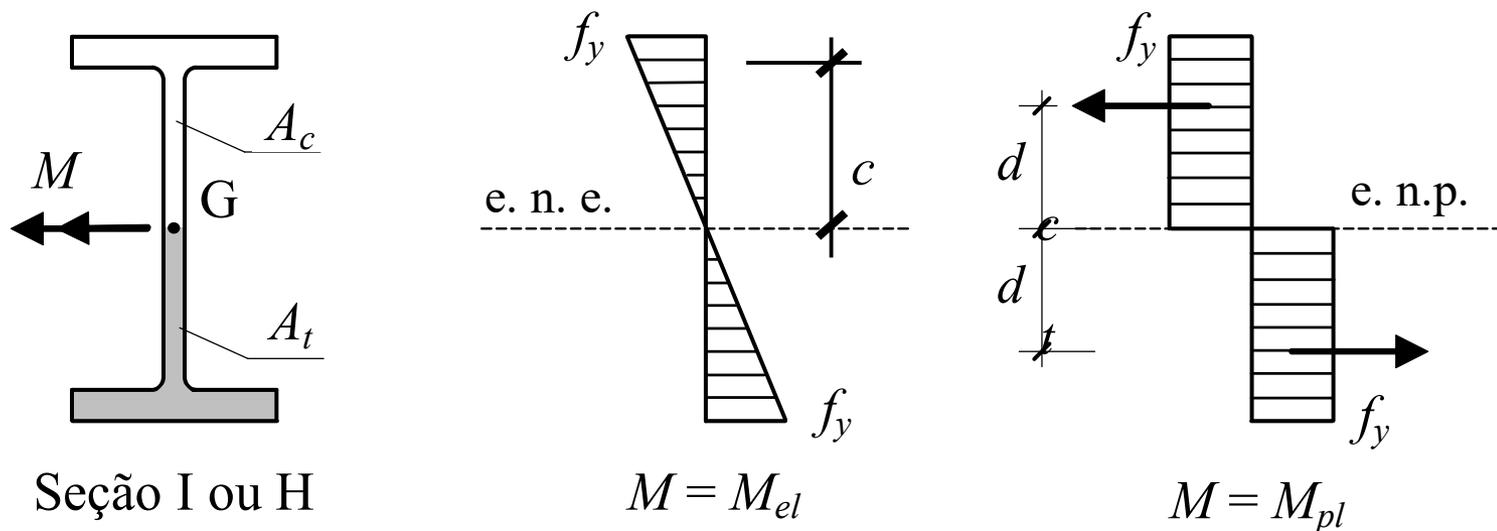
- Comportamento → viga bi-apoiada



# 3. Dimensionamento

- Momento elástico  $\rightarrow M_{el} = \frac{I}{c} f_y = W_{el} \times f_y$
- Momento plástico  $\rightarrow$

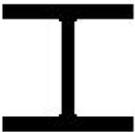
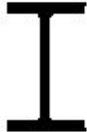
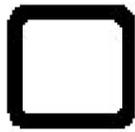
$$M_{pl} = A_c f_y d_c + A_t f_y d_t = (S_c + S_t) f_y = W_{pl} \times f_y$$



Seções simétricas  $\rightarrow$  e.n.e = e.n.p  $\rightarrow$   $d_c = d_t$

# 3. Dimensionamento

- Proporção entre seções transversais

Tipo de seção	Retangular	HE(A/B) ou UC (típicas)	IPE ou UB (típicas)	SHS (típicas)
Propriedades da seção				
Área	1	1	1	1
Módulo elástico da seção $W_{el}$	1	3,5	6,2	2,3
Módulo elástico da seção $W_{pl}$	1,5	3,9	7,2	2,9

# 3. Dimensionamento

- Flexão uniaxial

$$\frac{M_{Ed}}{M_{c,Rd}} \leq 1,0$$

onde  $M_{c,Rd}$  é a resistência de dimensionamento a flexão. A resistência a flexão em torno de um eixo principal da seção transversal é determinado como (cláusula 6.2.5(2))

- Seções classe 1 ou 2  $\rightarrow M_{c,Rd} = W_{pl} f_y / \gamma_{M0}$

- Seções classe 3  $\rightarrow M_{c,Rd} = W_{el,min} f_y / \gamma_{M0}$

- Seções classe 4  $\rightarrow M_{c,Rd} = W_{eff,min} f_y / \gamma_{M0}$

onde

- $W_{pl}$  é o módulo de resistência a flexão plástico;
- $W_{el,min}$  é o módulo de resistência a flexão mínimo elástico;
- $W_{eff,min}$  é o módulo de resistência a flexão mínimo elástico reduzido da seção efetiva;
- $f_y$  é a tensão de escoamento do material;
- $\gamma_{M0}$  é o coeficiente de segurança parcial.

# 3. Dimensionamento

- Flexão biaxial → Seções classe 1 ou 2 (plástico)

$$\left[ \frac{M_{y,Ed}}{M_{pl,y,Rd}} \right]^{\alpha} + \left[ \frac{M_{z,Ed}}{M_{pl,z,Rd}} \right]^{\beta} \leq 1,0$$

onde,  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros que são dependentes da forma da seção transversal  
 $M_{pl,y,Rd}$  e  $M_{pl,z,Rd}$  são, respectivamente, resistências plásticas a flexão em torno dos eixos  $y$  e  $z$

Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  podem ser, conservadoramente, adotados como 1,0; alternativamente, eles podem assumir os valores definidos na cláusula 6.2.9(6), isto é,  $\alpha = 2$  e  $\beta = 1$  para seções I ou H,  $\alpha = \beta = 2$  para seções tubulares circulares e  $\alpha = \beta = 1.66$  for para seções tubulares retangulares



## 3. Dimensionamento

- Flexão biaxial → Seções classe 3 ou 4 (elástico)

$$\sigma_{x,Ed} \leq \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

onde,  $\sigma_{x,Ed}$  é o valor de dimensionamento da tensão longitudinal avaliado elasticamente, baseado na seção transversal bruta, para seções classe 3, e em uma seção transversal efetiva, para seções classe 4.

# 3. Dimensionamento

## ■ Esforço cortante

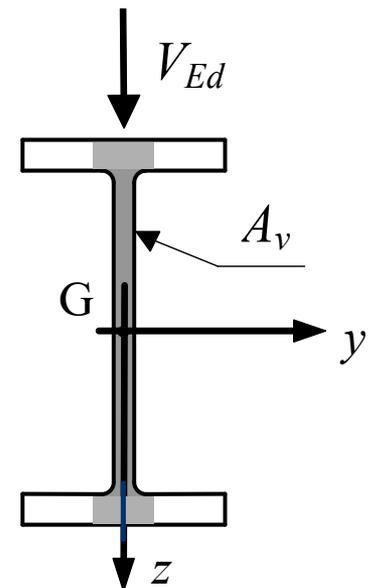
$$\frac{V_{Ed}}{V_{c,Rd}} \leq 1,0$$

onde  $V_{c,Rd}$  é a resistência de dimensionamento ao esforço cortante

- Regime plástico  $\rightarrow$  ausência de torção  $\rightarrow V_{c,Rd}$ , é dada pela resistência plástica ao esforço cortante,  $V_{pl,Rd}$

$$V_{pl,Rd} = A_v \left( f_y / \sqrt{3} \right) / \gamma_{M0}$$

onde,  $A_{vc}$  é a área de cisalhamento, definida de uma forma qualitativa para uma seção I, sob cisalhamento, na figura



# 3. Dimensionamento

## ■ Esforço cortante

$$\frac{V_{Ed}}{V_{c,Rd}} \leq 1,0 \quad \text{onde } V_{c,Rd} \text{ é a resistência de dimensionamento ao esforço cortante}$$

## ■ Regime elástico

$$\frac{\tau_{Ed}}{f_y / (\sqrt{3} \gamma_{M0})} \leq 1,0 \quad \text{com} \quad \tau_{Ed} = \frac{V_{Ed} S}{I t}$$

onde,  $\tau_{Ed}$  é o valor de dimensionamento da tensão local de cisalhamento em um dado ponto  
 $V_{Ed}$  é o valor de dimensionamento do esforço cortante;  
 $S$  é o primeiro momento de área em relação ao eixo do centroide da parte da seção transversal entre o ponto em que o esforço cortante é requerido e a fronteira da seção;  
 $I$  é o segundo momento de área em relação a linha neutra;  
 $t$  é a espessura da seção em um dado ponto.



## 3. Dimensionamento

- Flambagem por cisalhamento de almas não enrijecidas

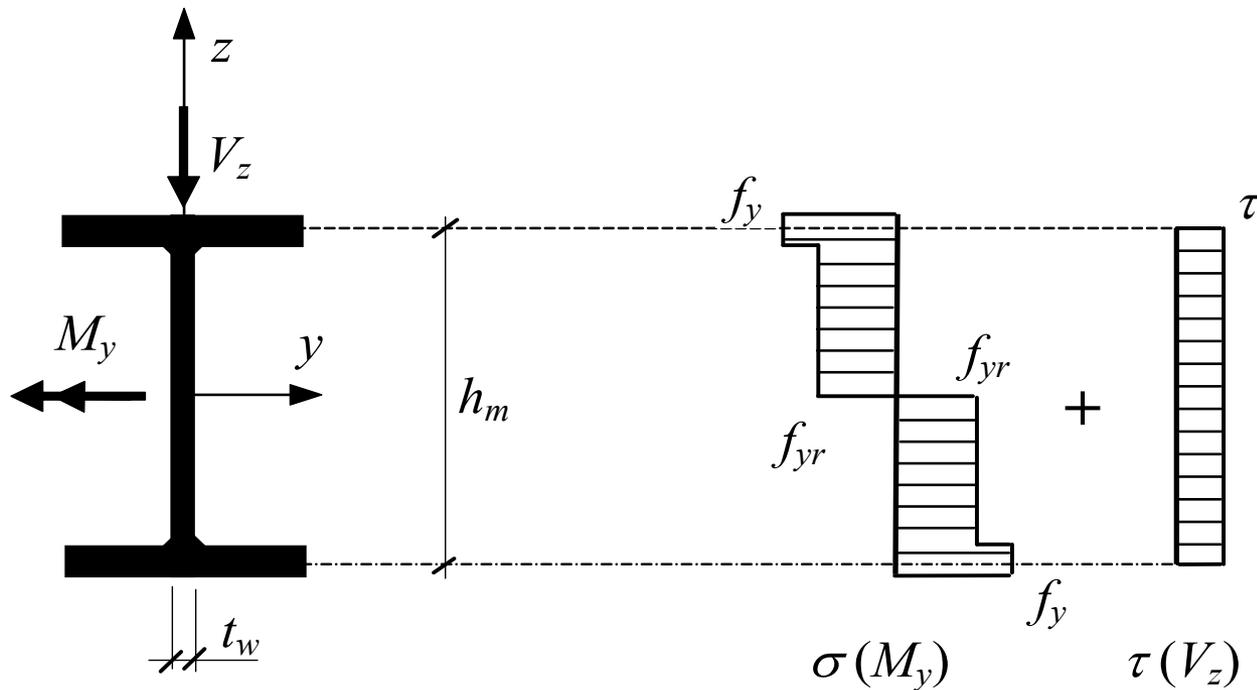
$$\left( h_w / t_w \right) > 72 \varepsilon / \eta$$

onde  $h_w$  e  $t_w$  são respectivamente, a altura e a espessura da alma,  $\eta$  é um coeficiente definido no EC3-1-5, que pode ser conservadoramente adotado como 1,0, e é avaliado através da expressão:  $\sqrt{(235/f_y)}$

# 3. Dimensionamento

- Flexão e cortante combinados → análise elástica

$$\sigma_{von-Mises} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$



# 3. Dimensionamento

- Flexão e cortante combinados → análise plástica

$$V_{Ed} < 50\%$$

não é necessário reduzir a resistência à flexão de dimensionamento  $M_{c,Rd}$ , exceto quando a flambagem por cisalhamento reduz a resistência da seção transversal

$$V_{Ed} \geq 50\%$$

o valor da resistência a flexão de dimensionamento deve ser avaliada usando uma tensão de escoamento reduzida  $(1-\rho)f_y$  para a área de cisalhamento, onde

$$\rho = \left(2V_{Ed}/V_{pl,Rd} - 1\right)^2$$

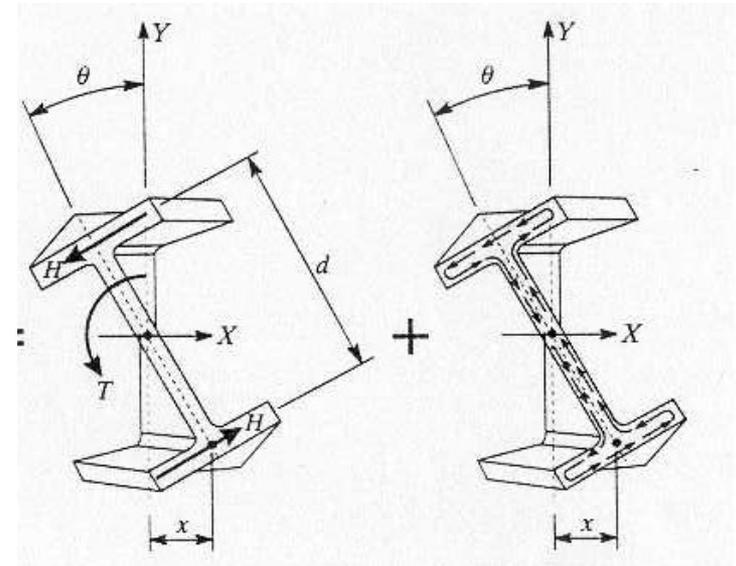
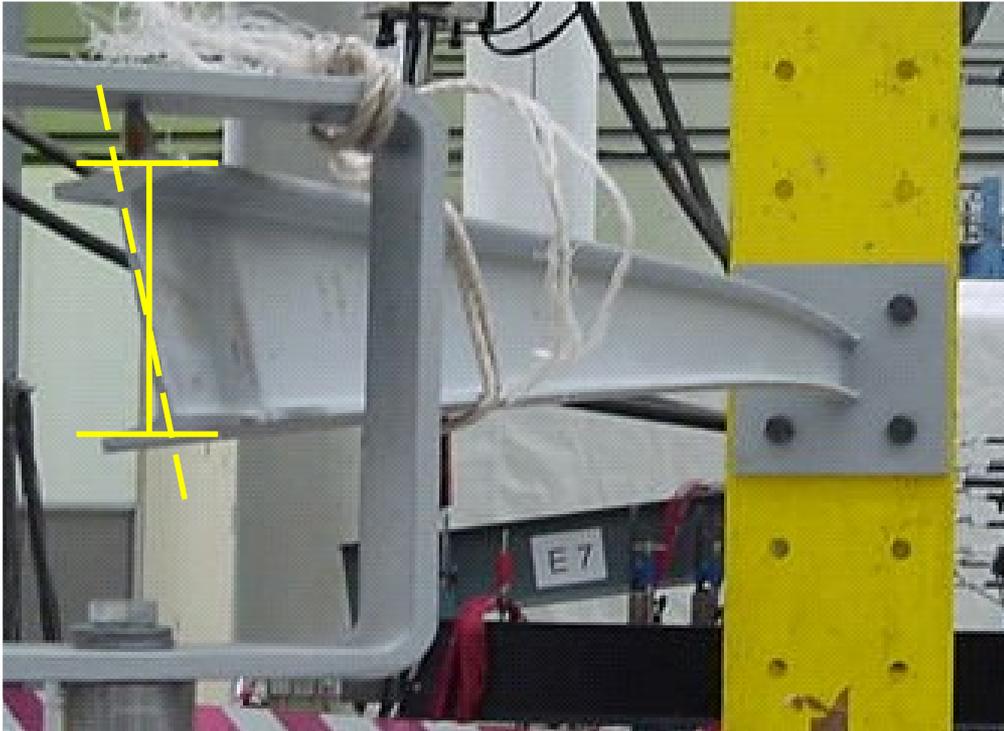
Em seções I ou H com mesas iguais, sob flexão no eixo de maior inércia, a resistência plástica a flexão reduzida  $M_{y,V,Rd}$  pode ser obtida com

$$M_{y,V,Rd} = \left( W_{pl,y} - \frac{\rho A_w^2}{4 t_w} \right) \frac{f_y}{\gamma_{M0}} \quad \text{mas} \quad M_{y,V,Rd} \leq M_{y,c,Rd}$$

onde  $A_w = h_w t_w$  é a área da alma,  $h_w$  é a altura da alma,  $t_w$  é a espessura da alma e  $M_{y,c,Rd}$  é a resistência a flexão de dimensionamento em torno do eixo y

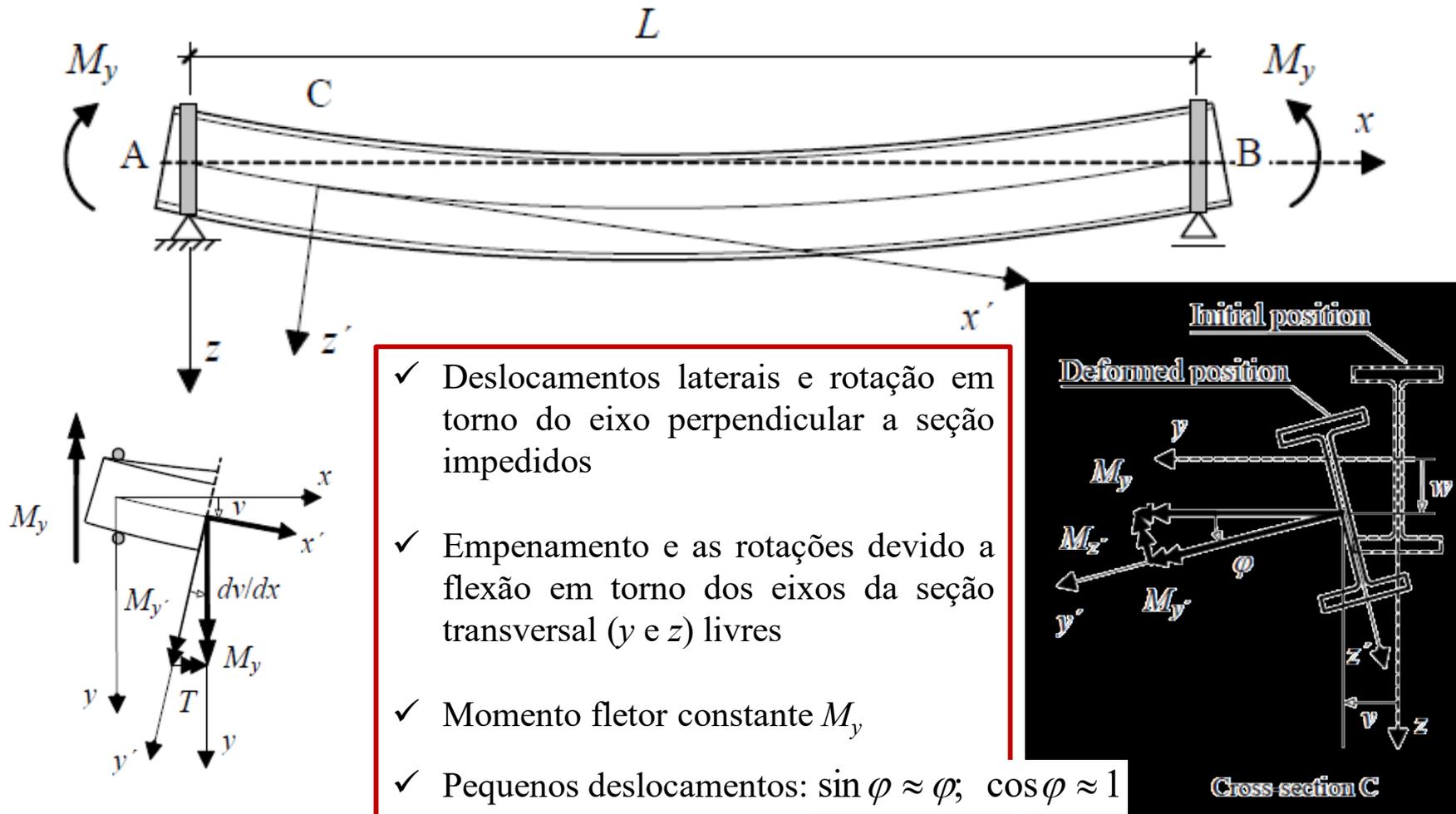
# 3. Dimensionamento

- Vigas não travadas lateralmente → flambagem lateral com torção → FLT



# 3. Dimensionamento

- Momento crítico  $\rightarrow$  FLT  $\rightarrow$  viga simplesmente apoiada



## 3. Dimensionamento

- Momento crítico → viga bi-apoiada → caso padrão

$$M_{cr}^E = \frac{\pi}{L} \sqrt{G I_T E I_z \left( 1 + \frac{\pi^2 E I_W}{L^2 G I_T} \right)}$$

onde

- $I_z$  é o segundo momento de área em relação ao eixo  $z$  (eixo de menor inércia)
- $I_T$  é a constante de torção uniforme
- $I_W$  é a constante de empenamento
- $L$  é o comprimento entre seções transversais da viga contraventadas lateralmente
- $E$  e  $G$  são os módulos de elasticidade longitudinal e transversal, respectivamente.

A equação acima, apesar de ter sido deduzida para um elemento com seção transversal I ou H, também é válida para elementos estruturais com outras seções transversais duplamente simétricas.

# 3. Dimensionamento

- Influência no momento crítico

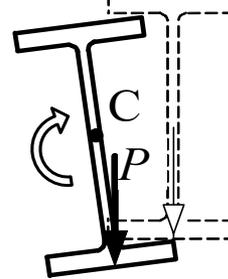
$$M_{cr}^E = \frac{\pi}{L} \sqrt{G I_T E I_z \left( 1 + \frac{\pi^2 E I_W}{L^2 G I_T} \right)}$$

- carregamento (forma do diagrama de momentos fletores);
- condições de apoio;
- comprimento do elemento entre seções transversais contraventadas lateralmente;
- rigidez a flexão lateral;
- rigidez a torção;
- rigidez ao empenamento
- ponto de aplicação da carga



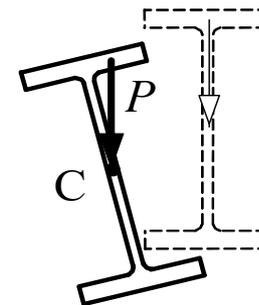
**Incorporação  
destes efeitos**

$$M_{cr,1} > M_{cr}$$

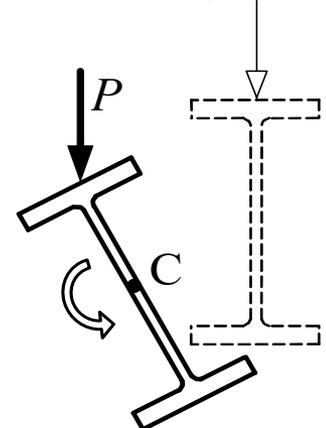


estabilizador

$$M_{cr}$$



$$M_{cr,2} < M_{cr}$$



desestabilizador

### 3. Dimensionamento

- Trahair (1993) →  $M_{cr}$  para seções transversais de vigas duplamente simétricas → como as seções I ou H → flexão em torno do eixo de maior inércia (eixo y) → **vários tipos de carregamentos aplicados no centro de cisalhamento das seções transversais** → pode ser estimado por

$$M_{cr} = \alpha_m M_{cr}^E$$

- Seções de extremidade (apoios ou outras seções transversais contraventadas lateralmente) → deslocamentos laterais e a rotação em torno do eixo da viga estão restringidos mas o empenamento e as rotações devido a flexão estão livres

### 3. Dimensionamento

- Trahair (1993)  $\rightarrow$   $M_{cr}$  para seções transversais de vigas duplamente simétricas  $\rightarrow$  como as seções I ou H  $\rightarrow$  flexão em torno do eixo de maior inércia (eixo y)  $\rightarrow$  **carga concentrada no meio do vão**

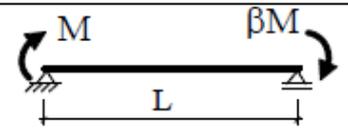
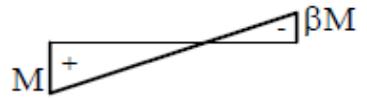
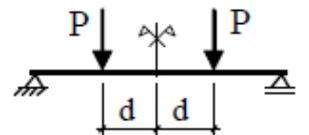
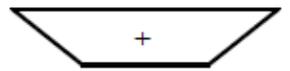
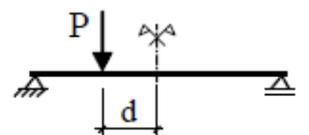
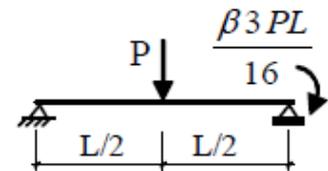
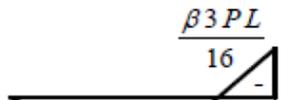
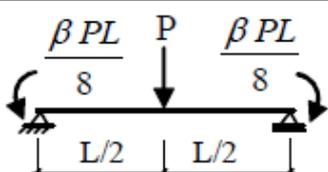
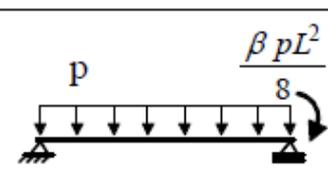
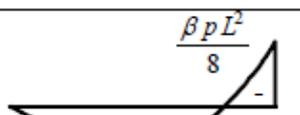
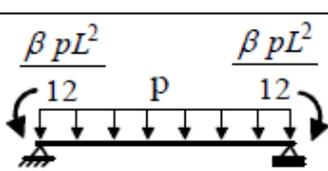
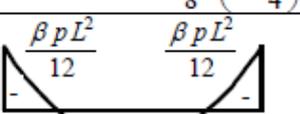
$$M_{cr} = \alpha_m M_{cr}^E \left\{ \sqrt{1 + \left( \frac{0,4 \alpha_m y_Q}{M_{cr}^E / N_{cr,z}} \right)^2} + \frac{0,4 \alpha_m y_Q}{M_{cr}^E / N_{cr,z}} \right\}$$

$\alpha_m = 1,35$   $\rightarrow$  carga concentrada no meio do vão

$\alpha_m = 1,13$   $\rightarrow$  carga uniformemente distribuída

$y_Q$  é a distância entre os pontos de aplicação das cargas e o centroide (neste caso ele coincide com o centro de cisalhamento)

$N_{cr,z} = \pi^2 E I_z / L^2$  onde  $I_z$  é o segundo momento de área em relação ao eixo z e  $L$  é a distância entre seções contraventadas lateralmente.

Member	Diagram of moments	$\alpha_m$	Validity limits
		$1.75 + 1.05\beta$ $+ 0.3\beta^2 \leq 2.5$	$-1 \leq \beta \leq 1$
	 $\frac{PL}{2} \left(1 - \frac{2d}{L}\right)$	$1.0 + 0.35(1 - 2d/L)^2$	$0 \leq \frac{2d}{L} \leq 1$
	 $\frac{PL}{4} \left(1 - \frac{4d^2}{L^2}\right)$	$1.35 + 0.4(2d/L)^2$	$0 \leq \frac{2d}{L} \leq 1$
	 $\frac{\beta 3PL}{16}$ $\frac{PL}{4} \left(1 - \frac{3\beta}{8}\right)$	$1.35 + 0.15\beta$ $-1.2 + 3\beta$	$0 \leq \beta \leq 0.89$ $0.89 \leq \beta \leq 1$
	 $\frac{\beta PL}{8}$ $\frac{PL}{4} \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)$	$1.35 + 0.36\beta$	$0 \leq \beta \leq 1$
	 $\frac{\beta pL^2}{8}$ $\frac{pL^2}{8} \left(1 - \frac{\beta}{4}\right)^2$	$1.13 + 0.10\beta$ $-1.25 + 3.5\beta$	$0 \leq \beta \leq 0.7$ $0.7 \leq \beta \leq 1$
	 $\frac{\beta pL^2}{12}$ $\frac{pL^2}{8} \left(1 - \frac{2\beta}{3}\right)$	$1.13 + 0.12\beta$ $-2.38 + 4.8\beta$	$0 \leq \beta \leq 0.75$ $0.75 \leq \beta \leq 1$

# 3. Dimensionamento

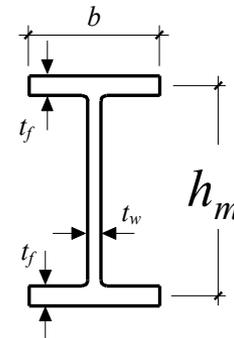
- Vigas em balanço → **carga concentrada na extremidade livre**

$$M_{cr} = 11 \frac{\sqrt{E I_z G I_T}}{L} \left[ 1 + \frac{1,2 \varepsilon}{\sqrt{1 + 1,44 \varepsilon^2}} \right] + 4(K - 2) \frac{\sqrt{E I_z G I_T}}{L} \left[ 1 + \frac{1,2(\varepsilon - 0,1)}{\sqrt{1 + 1,44(\varepsilon - 0,1)^2}} \right]$$

- Vigas em balanço → **carga linearmente distribuída ao longo do vão**

$$M_{cr} = 27 \frac{\sqrt{E I_z G I_T}}{L} \left[ 1 + \frac{1,4(\varepsilon - 0,1)}{\sqrt{1 + 1,96(\varepsilon - 0,1)^2}} \right] + 10(K - 2) \frac{\sqrt{E I_z G I_T}}{L} \left[ 1 + \frac{1,3(\varepsilon - 0,1)}{\sqrt{1 + 1,69(\varepsilon - 0,1)^2}} \right]$$

$$\varepsilon = \frac{2 y_Q}{h_m} \frac{K}{\pi} \quad \text{e} \quad K = \sqrt{\frac{\pi^2 E I_W}{G I_T L^2}} \quad \text{onde } h_m \text{ é a distância entre os centros das mesas}$$



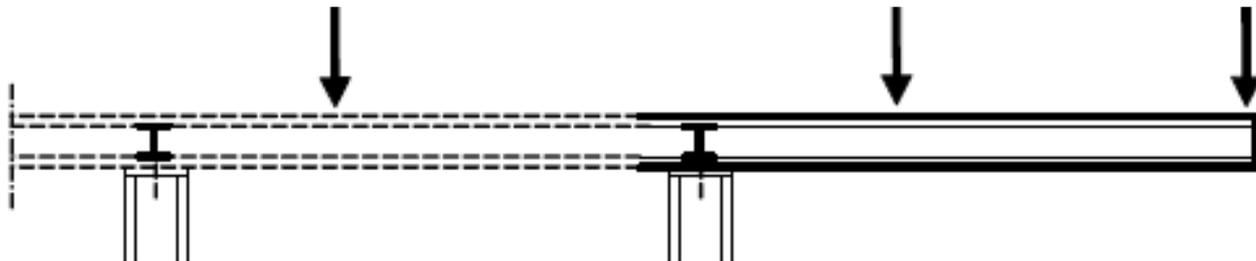
### 3. Dimensionamento

- Vigas contínuas com trecho em balanço → **carga concentrada na extremidade livre**

$$M_{cr} = 6 \frac{\sqrt{EI_z GI_T}}{L} \left[ 1 + \frac{1,5(\varepsilon - 0,1)}{\sqrt{1 + 2,25(\varepsilon - 0,1)^2}} \right] + 1,5(K - 2) \frac{\sqrt{EI_z GI_T}}{L} \left[ 1 + \frac{3(\varepsilon - 0,3)}{\sqrt{1 + 9(\varepsilon - 0,3)^2}} \right];$$

- Vigas contínuas com trecho em balanço → **carga linearmente distribuída ao longo do vão**

$$M_{cr} = 15 \frac{\sqrt{EI_z GI_T}}{L} \left[ 1 + \frac{1,8(\varepsilon - 0,3)}{\sqrt{1 + 3,24(\varepsilon - 0,3)^2}} \right] + 4(K - 2) \frac{\sqrt{EI_z GI_T}}{L} \left[ 1 + \frac{2,8(\varepsilon - 0,4)}{\sqrt{1 + 7,84(\varepsilon - 0,4)^2}} \right];$$



### 3. Dimensionamento

- Alternativa às equações anteriores → flexão em torno do eixo de maior inércia → seções mono-simétricas em relação ao eixo de menor inércia → eixo z → diversas condições de apoio e tipos de carga

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{(k_z L)^2} \left\{ \left[ \left( \frac{k_z}{k_w} \right)^2 \frac{I_W}{I_z} + \frac{(k_z L)^2 GI_T}{\pi^2 EI_z} + (C_2 z_g - C_3 z_j)^2 \right]^{0,5} - (C_2 z_g - C_3 z_j) \right\}$$

onde,

$C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são coeficientes que dependem da forma do diagrama de momentos fletores e das condições de apoio relativas ao “caso padrão”, porém, a possibilidade de restrição a flexão lateral e ao empenamento podem ser levadas em conta através dos parâmetros  $k_z$  e  $k_w$ ;

### 3. Dimensionamento

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{(k_z L)^2} \left\{ \left[ \left( \frac{k_z}{k_w} \right)^2 \frac{I_W}{I_z} + \frac{(k_z L)^2 GI_T}{\pi^2 EI_z} + (C_2 z_g - C_3 z_j)^2 \right]^{0,5} - (C_2 z_g - C_3 z_j) \right\}$$

onde,

$k_z$  e  $k_w$  são fatores  $\rightarrow$  comprimentos efetivos que dependem das condições de apoio nas extremidades das vigas

$k_z \rightarrow$  rotações nas seções de extremidade em torno do eixo de menor inércia, eixo z

$k_w \rightarrow$  restrição ao empenamento nestas mesmas seções transversais

Estes fatores variam entre 0,5 (restrição completa às deformações) e 1,0 (deformações livres), e são iguais a 0,7 no caso de deformações livres em uma extremidade e deformações restringidas na outra

Como na maioria das situações práticas a restrição a deformação é apenas parcial, conservadoramente, um valor de  $k_z = k_w = 1,0$  pode ser adotado

### 3. Dimensionamento

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{(k_z L)^2} \left\{ \left[ \left( \frac{k_z}{k_w} \right)^2 \frac{I_W}{I_z} + \frac{(k_z L)^2 GI_T}{\pi^2 EI_z} + (C_2 z_g - C_3 z_j)^2 \right]^{0,5} - (C_2 z_g - C_3 z_j) \right\}$$

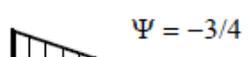
onde,

$z_g = (z_a - z_s)$  onde  $z_a$  e  $z_s$  são as coordenadas do ponto de aplicação da carga e do centro de cisalhamento, relativas ao centroide da seção transversal; estes valores são positivos se forem localizados na parte comprimida e negativos se forem localizados na parte tracionada

$$z_j = z_s - \left( 0,5 \int_A (y^2 + z^2) (z/I_y) dA \right)$$

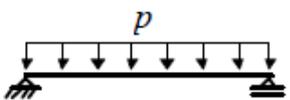
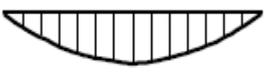
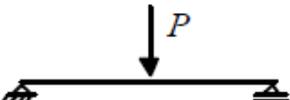
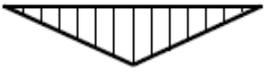
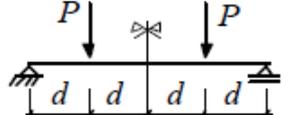
é um parâmetro que reflete o grau de assimetria da seção transversal em relação ao eixo y. Ele é zero para vigas com seção transversal duplamente simétricas (seções transversais com mesas iguais como as tipo I ou H) tendo valores positivos quando a mesa com o maior momento de área em relação ao eixo z for relativo a mesa comprimida, na seção transversal com o máximo momento fletor.



Loading and support conditions	Diagram of moments	$k_z$	$C_1$	$C_3$	
				$\psi_f \leq 0$	$\psi_f > 0$
	$\Psi = +1$ 	1.0 0.5	1.00 1.05	1.000 1.019	
	$\Psi = +3/4$ 	1.0 0.5	1.14 1.19	1.000 1.017	
	$\Psi = +1/2$ 	1.0 0.5	1.31 1.37	1.000 1.000	
	$\Psi = +1/4$ 	1.0 0.5	1.52 1.60	1.000 1.000	
	$\Psi = 0$ 	1.0 0.5	1.77 1.86	1.000 1.000	
	$\Psi = -1/4$ 	1.0 0.5	2.06 2.15	1.000 1.000	0.850 0.650
	$\Psi = -1/2$ 	1.0 0.5	2.35 2.42	1.000 0.950	$1.3 - 1.2\psi_f$ $0.77 - \psi_f$
	$\Psi = -3/4$ 	1.0 0.5	2.60 2.45	1.000 0.850	$0.55 - \psi_f$ $0.35 - \psi_f$
	$\Psi = -1$ 	1.0 0.5	2.60 2.45	$-\psi_f$ $-0.125 - 0.7\psi_f$	$-\psi_f$ $-0.125 - 0.7\psi_f$

# 3. Dimensionamento

- In beams subject to end moments, by definition  $C_2 z_g = 0$ .
- $\psi_f = \frac{I_{fc} - I_{ft}}{I_{fc} + I_{ft}}$ , where  $I_{fc}$  and  $I_{ft}$  are the second moments of area of the compression and tension flanges respectively, relative to the weak axis of the section ( $z$  axis);
- $C_1$  must be divided by 1.05 when  $\frac{\pi}{k_w L} \sqrt{\frac{E I_W}{G I_T}} \leq 1.0$ , but  $C_1 \geq 1.0$ .

Loading and support conditions	Diagram of moments	$k_z$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
		1.0 0.5	1.12 0.97	0.45 0.36	0.525 0.478
		1.0 0.5	1.35 1.05	0.59 0.48	0.411 0.338
		1.0 0.5	1.04 0.95	0.42 0.31	0.562 0.539

# 3. Dimensionamento

$\frac{M_{Ed}}{M_{b,Rd}} \leq 1,0 \rightarrow$  onde  $M_{Ed}$  é o valor de dimensionamento do momento fletor e  $M_{b,Rd}$  é a resistência de dimensionamento da flambagem

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} W_y f_y / \gamma_{M1}$$

onde

$W_y = W_{pl,y}$  para seções transversais classe 1 e 2;

$W_y = W_{el}$  para seções transversais classe 3;

$W_y = W_{eff,y}$  para seções transversais classe 4;

$\chi_{LT}$  é o fator de redução para considerar flambagem lateral a torção.

# 3. Dimensionamento

## ■ Método geral

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + (\phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2)^{0,5}} \quad \text{mas } \chi_{LT} \leq 1,0$$

$$\phi_{LT} = 0,5 \left[ 1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right]$$

$\alpha_{LT}$  é o fator de imperfeição, que depende da curva de flambagem (compressão)

$\bar{\lambda}_{LT} = [W_y f_y / M_{cr}]^{0,5}$  onde  $M_{cr}$  é o momento crítico elástico obtido por umas das equações anteriores

Seção	Limites	Curvas de flambagem
Seções I ou H laminadas	$h/b \leq 2$	<i>a</i>
	$h/b > 2$	<i>b</i>
Seções I ou H soldadas	$h/b \leq 2$	<i>c</i>
	$h/b > 2$	<i>d</i>
Outras seções	---	<i>d</i>

# 3. Dimensionamento

- Método alternativo → seções laminadas ou soldadas equivalentes

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + (\phi_{LT}^2 - \beta \bar{\lambda}_{LT}^2)^{0,5}} \quad \text{mas} \quad \begin{array}{l} \chi_{LT} \leq 1.0 \\ \chi_{LT} \leq 1/\bar{\lambda}_{LT}^2 \end{array}$$

$$\phi_{LT} = 0,5 \left[ 1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - \bar{\lambda}_{LT,0}) + \beta \bar{\lambda}_{LT}^2 \right]$$

$\bar{\lambda}_{LT,0}$  e  $\beta$  são parâmetros a serem definidos nos Anexos Nacionais; os valores recomendados são  $\bar{\lambda}_{LT,0} \leq 0,4$  (valor máximo) e  $\beta \geq 0,75$  (valor mínimo)

$\alpha_{LT}$  é o fator de imperfeição, que depende da curva de flambagem (compressão)

$$\bar{\lambda}_{LT} = \left[ W_y f_y / M_{cr} \right]^{0,5}$$

onde  $M_{cr}$  é o momento crítico elástico obtido por umas das equações anteriores

Seção	Limites	Curva de Flambagem (EC3-1-1)
Seções I ou H laminadas	$h/b \leq 2$	<i>b</i>
	$h/b > 2$	<i>c</i>
Seções I ou H soldadas	$h/b \leq 2$	<i>c</i>
	$h/b > 2$	<i>d</i>

### 3. Dimensionamento

- Método alternativo → seções laminadas ou soldadas equivalentes

De acordo com este segundo método, a forma do diagrama de momentos fletores, entre pontos contraventados lateralmente, pode ser considerada através de um coeficiente de redução modificado  $\chi_{LT,mod}$

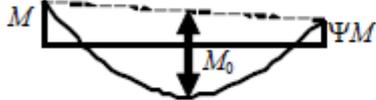
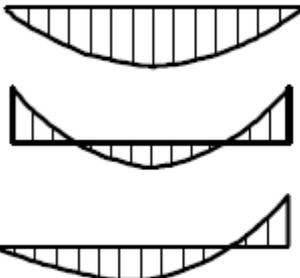
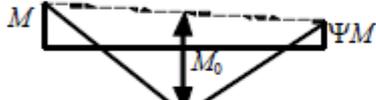
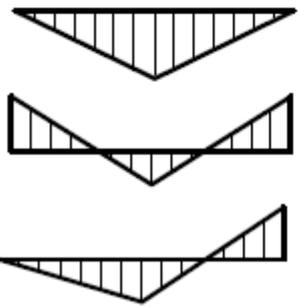
$$\chi_{LT,mod} = \frac{\chi_{LT}}{f} \quad \text{mas} \quad \chi_{LT,mod} \leq 1,0$$

O parâmetro  $f$  pode ser obtido a partir da equação abaixo, ou por um processo alternativo presente nos Anexos Nacionais

$$f = 1 - 0,5(1 - k_c) \left[ 1 - 2,0(\bar{\lambda}_{LT} - 0,8)^2 \right] \quad \text{mas} \quad f \leq 1,0$$

onde  $k_c$  é um fator de correção

## Diagram of bending moments

<p style="text-align: center;"><math>\Psi = +1</math></p>  <p style="text-align: center;"><math>-1 \leq \Psi \leq 1</math></p> 	$k_c$  $1.0$  $\frac{1}{1.33 - 0.33\Psi}$
 	$0.94$  $0.90$  $0.91$
 	$0.86$  $0.77$  $0.82$

$\Psi$  - ratio between end moments, with  $-1 \leq \Psi \leq 1$ .