

1. Introdução

O que leva à falha de uma estrutura?

Um engenheiro sempre deve considerar possíveis modos de falha ao projetar uma estrutura. Algumas delas são:

O escoamento em tensões baixas;

As deformações e deflexões; e

A fadiga provocada por ciclos de carregamentos repetidos.

Para evitar os tipos de falha mencionados acima, devem ser considerados critérios de projeto baseados em resistência (tensão) e rigidez (deflexão).

Este capítulo, porém, aborda como tema principal outro modo importante de falha: a *flambagem*.

Um exemplo típico desse fenômeno pode ser observado ao se aplicar uma carga axial a uma régua (*Figura 1*). Outro exemplo clássico envolve uma treliça com duas barras, sendo que uma está submetida à compressão e outra a tração (*Figura 2*).

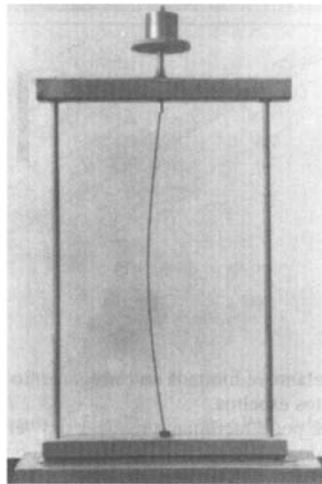


Figura 1 - Carga axial elemento esbelto

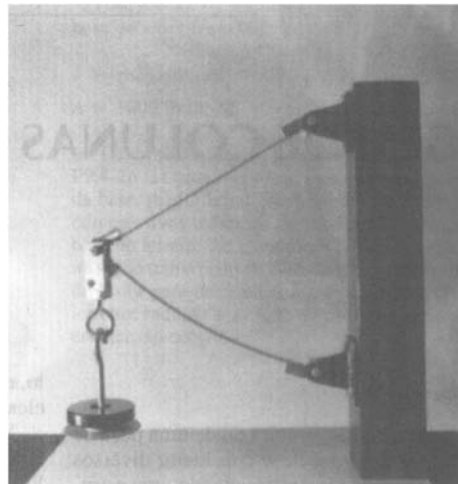


Figura 2 - Treliza de duas barras

Nesses dois exemplos, pesos são adicionados até que seja atingida uma determinada carga: o $P_{crítico}$ do elemento sob compressão. Após esse limite, o elemento subitamente deflete lateralmente sob a carga compressiva axial.

Anteriormente, na análise de deformações axiais, considerava-se que, mesmo sob carregamento compressivo, o elemento que sofria carregamento

axial permanecia reto e as únicas deformações possíveis eram a redução ou o alongamento do elemento na direção longitudinal.

Porém, estudos aprofundados observaram que a partir de um determinado valor em carregamentos axiais de compressão, a régua ou a barra comprimida da treliça não permanecem mais retas, ou seja, defletem lateralmente de modo súbito, como uma viga. **Esta deflexão lateral ocasionada pela compressão axial é denominada flambagem.**

Falhas por flambagem são freqüentemente súbitas e catastróficas, por isso, a sua prevenção é de grande importância.

2. Estabilidade de Estruturas

Todo e qualquer problema de Engenharia Civil envolve equilíbrio. Neste capítulo, é necessário definir os tipos de equilíbrio associados a diferentes formas de **estabilidade**.

Este conceito pode ser demonstrado muito claramente considerando-se o equilíbrio de uma esfera sobre três superfícies diferentes.

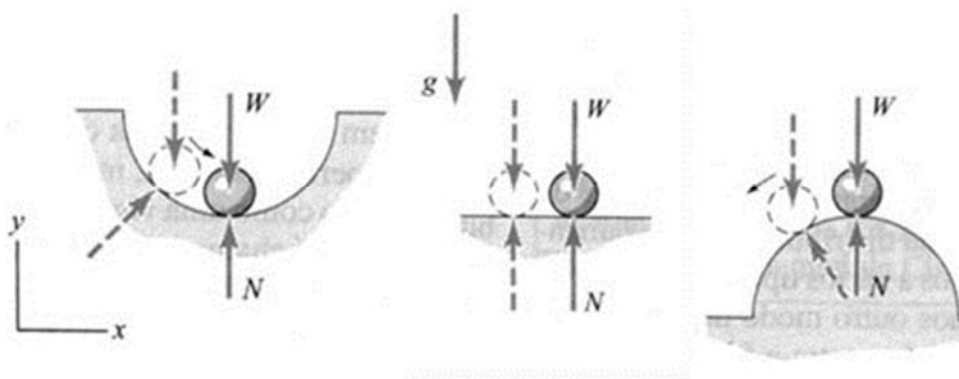


Figura 3 - Tipos de equilíbrio

A **Figura 3** apresenta três situações em que a esfera está em equilíbrio, ou seja, $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ e $\sum M = 0$. Na primeira parte da **Figura 3**, a esfera encontra-se em **equilíbrio estável**, pois, seja qual for o deslocamento provocado nela, quando solta, a esfera retornará sempre à posição de equilíbrio no fundo do “vale”.

No último quadro da **Figura 3**, apesar da esfera estar na posição de equilíbrio, qualquer deslocamento aplicado a ela fará com que ela se afaste cada vez mais da posição de equilíbrio inicial, o que caracteriza um **equilíbrio instável**.

E, finalmente no meio da **Figura 3**, a esfera encontra-se sobre uma superfície perfeitamente plana, na qual se obtém uma configuração de **equilíbrio neutro**. Se a esfera for ligeiramente deslocada para qualquer um dos lados, ela não tem tendência

a se mover nem para a posição original, nem para um ponto além. Com isso, após esse evento, a esfera estará em equilíbrio, novamente, numa posição deslocada da original.

2.1. Aplicação do equilíbrio a elementos submetidos à compressão

Deseja-se dimensionar a coluna **AB** de comprimento L que vai suportar a carga **P** conforme apresentado na **Figura 4** a seguir. O elemento **AB** é tido como perfeitamente reto e rígido e considera-se que não há fricção no pino em **A** e que a carga **P** é aplicada no eixo do elemento.

Inicialmente, poderíamos concluir que a coluna estaria bem dimensionada se a área **A** da seção transversal fosse escolhida de modo que o valor da **tensão** ($\sigma = P/A$) em qualquer ponto da barra esteja **abaixo da tensão admissível** σ_{adm} do material utilizado e se a **deformação** ($\delta = PL/AE$) se mantiver **dentro das especificações recomendadas**.

No entanto, o fenômeno de **flambagem** pode ocorrer na barra. Ao aplicar a força **P**; em vez de permanecer com o seu eixo retilíneo, a coluna se torna subitamente encurvada. Quando isso ocorrer, sob um carregamento especificado no cálculo, significa que a coluna não foi dimensionada corretamente.

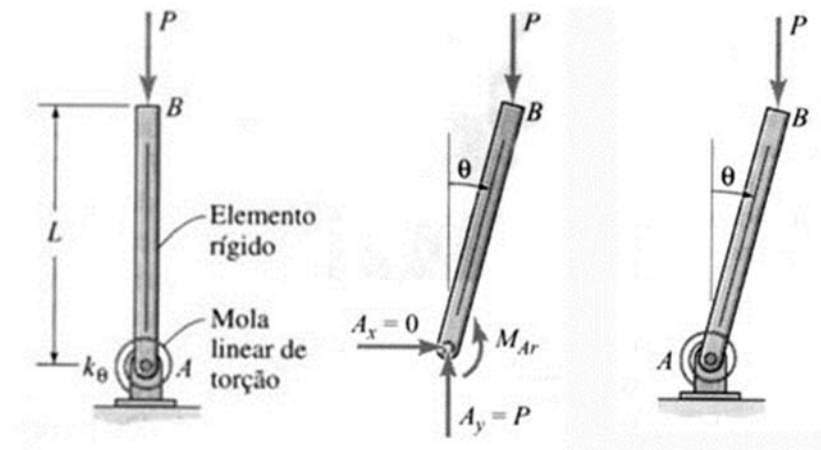


Figura 4 – Barra submetida à compressão

Na **Figura 4** no ponto **A**, observa-se uma mola com constante elástica k_θ . Ao ser provocado um deslocamento na barra, a mola produz em **A** um momento de restauração M_{AR} que tende a retornar o elemento à sua posição original. Este momento em **A** é proporcional ao ângulo de deflexão θ do elemento **AB** em relação à vertical.

$$M_{AR} = k_\theta \cdot \theta$$

Equação 1

Ao girar a barra de um ângulo θ muito pequeno, o momento provocado pela força P é dado por:

$$M_{AP} = PL \operatorname{sen} \theta \quad \text{Equação 2}$$

Ou seja, para diferentes valores de P e de θ tem-se situações de equilíbrio distintas. Combinando-se as duas equações anteriores, os sistemas têm as seguintes condições para os equilíbrios estável, neutro e instável:

<p>Estável</p> $M_{AP} < M_{AR}$ $PL \operatorname{sen} \theta < k_{\theta} \cdot \theta$	<p>Neutro</p> $M_{AP} = M_{AR}$ $PL \operatorname{sen} \theta = k_{\theta} \cdot \theta$	<p>Instável</p> $M_{AP} > M_{AR}$ $PL \operatorname{sen} \theta > k_{\theta} \cdot \theta$
---	--	--

Equação 3

Em Engenharia Civil, lidamos, apenas, com pequenas deformações, ou seja, tende a zero. E quando o ângulo θ é pequeno, $\operatorname{sen} \theta \cong \theta$ e a **Equação 3** tem os seguintes desdobramentos:

<p>Estável</p> $P < P_{cr}$	<p>Neutro</p> $P = P_{cr}$	<p>Instável</p> $P > P_{cr}$
-----------------------------	----------------------------	------------------------------

Equação 4

Onde:

$$P_{cr} = k_{\theta} / L \quad \text{Equação 5}$$

A carga que define a transição entre o equilíbrio estável e o equilíbrio instável é a chamada **carga crítica** P_{cr} . A perda de estabilidade do equilíbrio é chamada de flambagem, de modo que também chamamos P_{cr} de **carga crítica de flambagem**.

Para ilustrar adequadamente a relação entre a carga aplicada e a estabilidade do sistema estrutural, observemos o diagrama de equilíbrio apresentado na *Figura 5* abaixo. Trata-se de um gráfico de carga P versus o ângulo de deflexão θ . O ponto **B**, onde o diagrama de equilíbrio se divide, é chamado de ponto de bifurcação. Exatamente no ponto **B**, onde $P = P_{cr}$, o equilíbrio do elemento é neutro.

Na configuração vertical, ou seja, $\theta = 0$, representada pela linha tracejada, obtém-se uma situação de equilíbrio instável acima do ponto **B**; e uma situação estável abaixo dele. Configurações alternativas de equilíbrio estável ocorrem ao longo das curvas **BC** e **BC'**, com $\theta \neq 0$.

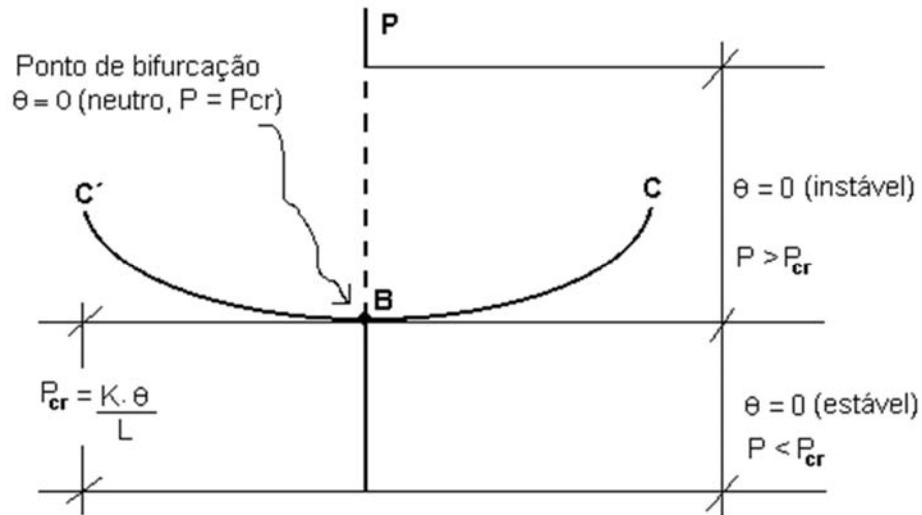


Figura 5 – Diagrama de Equilíbrio

3. Fórmula de Euler para colunas com extremidades articuladas

No exemplo da *Figura 4*, observou-se o comportamento de uma barra rígida associada a uma mola de torção quando submetida à compressão. Em casos reais, as colunas possuem uma flexibilidade atribuída ao material e não respondem como o exemplo citado acima. Para nos aproximarmos da realidade, analisemos através da *Figura 6* uma coluna ideal com pinos em suas extremidades.

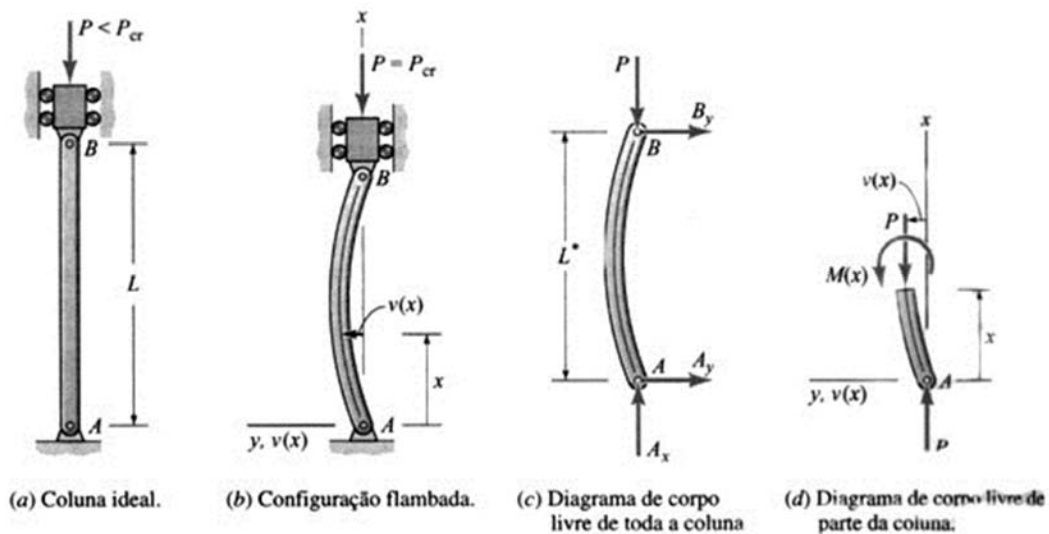


Figura 6 - Coluna Ideal

Para a simplificação do modelo, algumas hipóteses são consideradas:

- i. Inicialmente, a coluna é perfeitamente reta;
- ii. O material que a compõe tem comportamento linear elástico;
- iii. Os pinos das extremidades passam pelo centróide da seção transversal;
- iv. A coluna tem liberdade para girar pelos pinos sem que haja fricção, assim, as restrições desses apoios são equivalentes àquelas de uma viga bi-apoiados;
- v. A coluna é simétrica em relação ao plano xy e qualquer deflexão lateral da coluna ocorrerá neste plano; e
- vi. A coluna recebe uma força axial compressiva **P** aplicada através do pino superior.

3.1. Configuração Flambada

Analisando os valores atribuídos a essa carga:

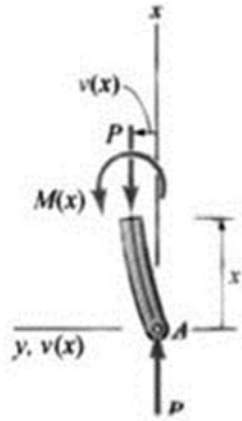
$P < P_{cr}$ **Equilíbrio estável:** a coluna permanecerá reta e seu comprimento será reduzido. A tensão axial é uniforme e regida pela equação: $\sigma = P/A$.

$P = P_{cr}$ **Equilíbrio neutro**

Para determinar da carga crítica P_{cr} e a configuração da coluna flambada, deve-se determinar o valor da carga **P** quando a coluna estiver ligeiramente fletida e em condição de equilíbrio.

3.2. Equilíbrio de Colunas Flambadas

Analisando o diagrama de corpo livre da **Figura 6**, obtém-se:



1

$$\begin{aligned}\sum V &= 0 \quad \therefore A_x = P \\ \sum M &= 0 \quad \therefore M_{A,z} = 0 \\ \sum H &= 0 \quad \therefore A_y = 0\end{aligned}$$

Como $\sum M_A = 0$, tem-se:

$$M(x) = -P \cdot v(x) \quad \text{Equação 6}$$

Em vigas submetidas à flexão, o momento de curvatura é definido pela equação $M(x) = EI v''$; onde $v'' = d^2v/dx^2$.

Substituindo-se na equação acima o $M(x)$ da **Equação 6**, tem-se:

$$EIv'' = -P \cdot v(x)$$

$$EIv''(x) + Pv(x) = 0 \quad \text{Equação 7}$$

Está é a equação diferencial que governa a deformada de uma coluna com extremidades em pino. Trata-se de uma equação diferencial ordinária, homogênea, linear e de segunda ordem.

As condições de contorno para um elemento vinculado por pinos são:

$$v(0) = 0; \text{ e } v(L) = 0 \quad \text{Equação 8}$$

A presença do termo $v(x)$ na **Equação 7** significa que não se pode integrar duas vezes a equação para se obter a solução. De fato, apenas quando EI for constante, existirá uma solução simples para esta equação. Sendo assim, a **Equação 7** é uma equação diferencial ordinária com coeficientes constantes.

A **Equação 7** pode ser reescrita dividindo-se todos os termos por EI :

¹ $M(x)$ é considerado positivo quando há compressão nas fibras na direção positiva de y .

$$v''(x) + \frac{Pv(x)}{EI} = 0 \quad \text{Equação 9}$$

Adotando-se $\lambda^2 = P/EI$, tem-se:

$$v''(x) + \lambda^2 v(x) = 0 \quad \text{Equação 10}$$

A solução geral desta equação homogênea é:

$$v(x) = C_1 \text{sen}\lambda(x) + C_2 \text{cos}\lambda(x) \quad \text{Equação 11}$$

Deseja-se encontrar um valor para λ e conhecer as constantes de integração C_1 e C_2 , tal que as duas condições de contorno apresentadas na *Equação 8* sejam satisfeitas.

$$v(0) = 0; \quad \bullet \quad v(0) = C_1 \text{sen}\lambda(0) + C_2 \text{cos}\lambda(0) \therefore$$

$$0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1$$

$$C_2 = 0$$

$$v(l) = 0; \quad \bullet \quad v(L) = C_1 \text{sen}\lambda(L) + C_2 \text{cos}\lambda(L) \therefore$$

$$0 = C_1 \text{sen}\lambda(L) + 0 \times \text{cos}\lambda(L)$$

$$C_1 \cdot \text{sen}\lambda(L) = 0$$

Obviamente que, se $C_1 = C_2 = 0$, a deflexão $v(x)$ será zero em todos os pontos e apenas obtém-se a configuração retilínea original.

Como se deseja uma configuração de equilíbrio alternativa - *Figura 6 (b)* - deve-se encontrar um valor de λ que satisfaça a equação com $C_1 \neq 0$, ou seja, λ deve satisfazer a equação característica:

$$\text{sen}(\lambda_n \cdot l) = 0$$

$$\lambda_n = (n\pi/L); n = 1; 2; 3; \dots$$

Como $\lambda^2 = P/EI$, tem-se:

$$P_n = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad \text{Equação 12}$$

A função que representa a configuração da coluna deformada é chamada **Modo de Flambagem** ou **Modo de Forma**. A constante C determina a direção (caracterizada pelo sinal) e a amplitude da deflexão da barra que é pequena e arbitrária.

O valor de P no qual a flambagem vai realmente ocorrer é obviamente o menor valor dado pela *Equação 12*, ou seja, $n = 1$.

$$P_n = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \text{Equação 13}$$

Essa é a **carga de flambagem de Euler**.

E o **modo de flambagem** correspondente é descrito em:

$$v(x) = C \text{sen}(\pi x/L) \quad \text{Equação 14}$$

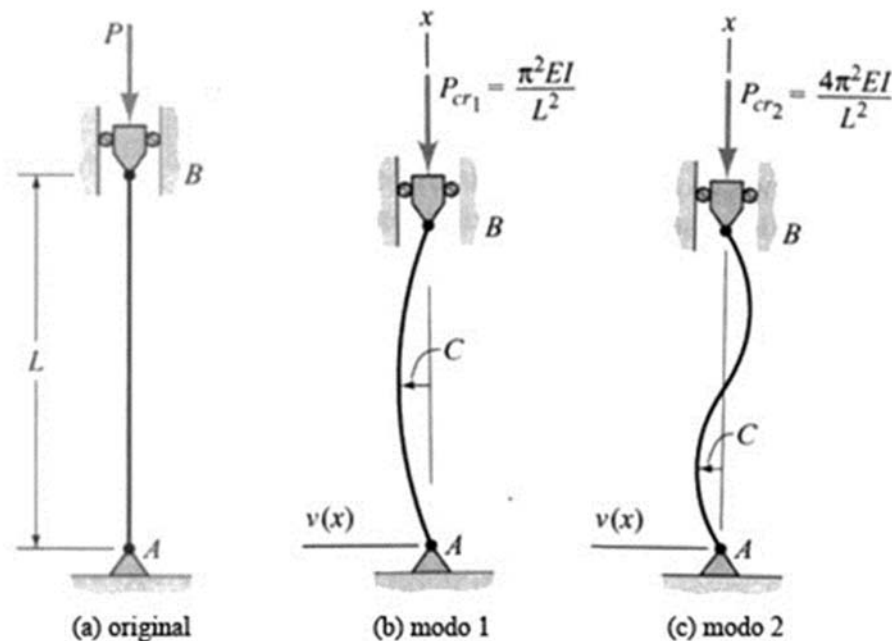


Figura 7 - Modos de Flambagem

A *carga crítica* para uma coluna ideal é conhecida como *carga de flambagem de Euler*, devido a Leonhard Euler (1707-1783), matemático suíço que estabeleceu a primeira teoria para flambagem para colunas.

O *modo de flambagem* também pode ser chamado de *modo de flambagem fundamental* ou, até mesmo, *primeiro modo*. Deve-se observar que a carga aplicada para que ocorra o modo 1 de flambagem da *Figura 7 (b)* é quatro vezes menor que a carga aplicada para que ocorra o modo 2, *Figura 7 (c)*. Ou seja, é mais natural que a coluna se deforme segundo o modo 1 de flambagem. O modo 2 de deformação só

ocorrerá na presença de um suporte lateral em $x = L/2$, um tipo de travamento para impedir que a flambagem ocorra do *primeiro modo*.

A expressão da *carga de Euler* pode ser escrita em termos de tensão, resultando em uma equação da tensão crítica de flambagem:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E (Ar^2)}{AL^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \quad \text{Equação 15}$$

Sendo:

σ_{cr} A tensão crítica (de flambagem elástica);

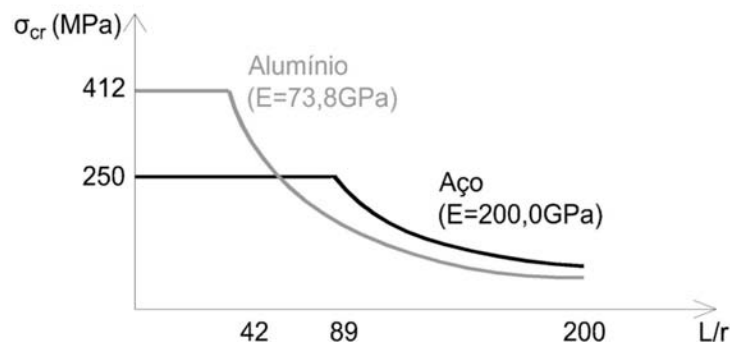
E O módulo de elasticidade do material (ou módulo de Young);

$r = \sqrt{I/A}$ o raio de giração; e

L o comprimento do elemento entre suportes.

A razão L/r , apresentada na equação acima, representa o índice de esbeltez λ de uma coluna.

No gráfico abaixo, tensão crítica versus índice de esbeltez, o comportamento do aço estrutural e da liga de alumínio está caracterizado através das seguintes curvas de flambagem:



Através do exposto acima, algumas características de **flambagem elástica** de colunas ideais podem ser citadas:

- i. Um material com maior *módulo de elasticidade* E , provoca um aumento direto na capacidade de carga de flambagem elástica de um elemento. Essa propriedade, que representa a rigidez mecânica do material, atua diretamente nas equações de tensão e carga crítica de flambagem;
- ii. A carga de flambagem é inversamente proporcional ao quadrado do comprimento da peça, conforme verificado na *Figura 7*;
- iii. A *equação de Euler* vale apenas para colunas “longas”, ou seja, é válida para tensões críticas até o limite de proporcionalidade a compressão do material σ_{pl} . Quando não se conhece σ_{pl} , o limite de escoamento de compressão σ_y é usualmente utilizado na substituição do primeiro. Os índices de esbeltez λ que marcam o limite de validade da *equação de Euler* para o aço e para uma liga de alumínio estão evidenciados no gráfico acima;
- iv. Maiores momentos de inércia I fornecem maiores cargas de flambagem. Para atingir maiores valores, podem-se utilizar seções transversais maiores, vazadas e que conservem a área anteriormente empregada. Entretanto, se a parede da seção transversal for muito fina, a peça poderá sofrer flambagem local, como pode ser visto no cilindro curto da *Figura 8*².
- v. Se os momentos principais de inércia da seção transversal da coluna forem desiguais, como no caso de perfis **I**, a coluna flambará em relação à seção transversal de menor inércia. Essa situação é válida quando não há restrições à flambagem produzidas por condições de contorno que forcem a coluna a flambar de outro modo; e
- vi. Quando o *índice de esbeltez* λ é muito grande, como por exemplo, em $L/r > 200$, a tensão crítica atingida na flambagem é muito pequena. Nesses casos, o projeto deve ser modificado porque a resistência do material está subutilizada. A alteração nas condições de contorno pode ser uma das soluções para diminuir o λ de projeto.

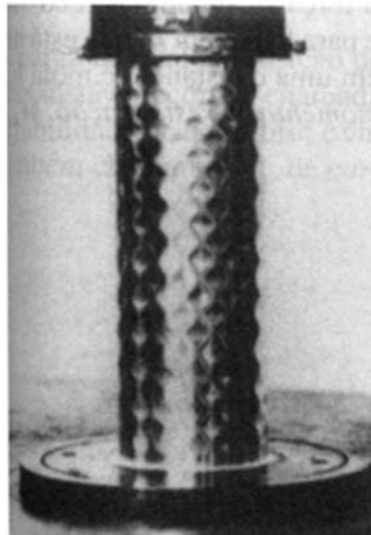


Figura 8 - Flambagem local

² *Figura 8* – falha por flambagem de um cilindro de paredes finas comprimidas axialmente (Fonte: fotografia de W. H. Horton; de *Computerized Buckling Analysis of Shells*, por D. Bushnell, 1985).

Exemplo 1.1

Qual é a carga compressiva máxima que pode ser aplicada ao elemento da **Figura 9** em liga de alumínio submetido à compressão, com $4m$ de comprimento, se o elemento é carregado de uma maneira que permite rotação livre nas suas extremidades e se um fator de segurança de 1,5 contra falhas deve ser aplicado?

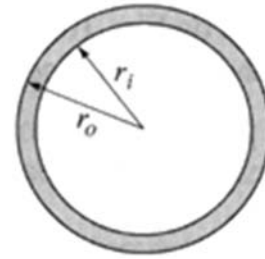


Figura 9 - Seção transversal

Dados:

$$E = 70GPa$$

$$F.S. = \frac{\text{carga de falha}}{\text{carga admissível}} = 1,5$$

$$\sigma_y = 270MPa$$

$$L = 4m$$

$$r_o = 45mm$$

$$r_i = 40mm$$

Solução:

Momento de Inércia de seções circulares:

$$I = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi(45^2 - 40^2)}{4}$$

Considerando a “rotação livre nas suas extremidades” e o cálculo da carga pela equação de Euler (a tensão atingida é menor que a tensão de escoamento):

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 (70 \cdot 10^3) \pi (45^2 - 40^2)}{4000^2 \cdot 4} = 52247N = 52,25kN$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{52247N}{\pi(45^2 - 40^2)} = 39,13MPa < \sigma_y$$

Como a tensão crítica é menor que a tensão de escoamento, confirma-se a hipótese anterior e conclui-se que o elemento sofrerá flambagem elástica em $\lambda = L/r = 133$.

Cálculo da carga admissível:

$$P_{adm} = \frac{P_{cr}}{FS} = \frac{52,25}{1,5} = 34,8kN$$

Exemplo 1.2

Uma coluna de extremidades articuladas tem seção transversal quadrada de 2m de comprimento. Esta coluna é constituída de pinho com $E = 13GPa$ e $\sigma_{adm} = 12MPa$ para compressão na direção paralela às fibras. Usando um coeficiente de segurança de 2,5 no cálculo da *carga crítica de Euler* para flambagem, determinar a dimensão da seção transversal, de modo que a coluna possa resistir com segurança a uma força de 100kN.

Solução:

$$P_{cr} = P_{adm}FS = 100 \cdot 2,5 = 250kN$$

Pela equação de Euler:

$$I = \frac{P_{cr}L^2}{\pi^2 E} = \frac{250 \cdot 10^3 \cdot 2000^2}{\pi^2 \cdot 13 \cdot 10^3} = 7,794 \cdot 10^6 mm^4$$

Sendo a seção quadrada:

$$I = \frac{a \cdot a^3}{12}$$

$$a = \sqrt[4]{12I} = \sqrt[4]{12 \cdot 7,794 \cdot 10^6} = 98,34mm$$

Adotando $a = 100mm$, verificamos a tensão:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{100 \cdot 10^3}{100^2} = 10MPa < 12MPa = \sigma_y$$

A tensão na seção adotada é menor que a tensão de escoamento, o que comprova a escolha.

3.3. O efeito das condições de extremidade na flambagem de colunas

Em raras ocasiões, ou nunca, uma carga de compressão será transmitida a um elemento através de pinos sem fricção. Por exemplo, na *Figura 1* abaixo podemos observar uma coluna aparafusada a uma base pesada na sua extremidade inferior e conectada a outros elementos na sua extremidade superior.

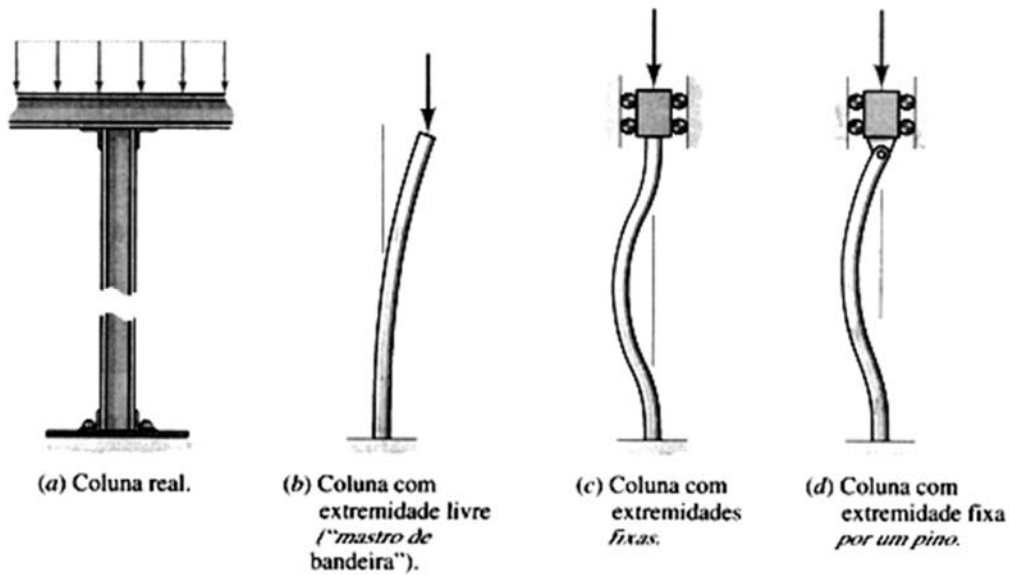
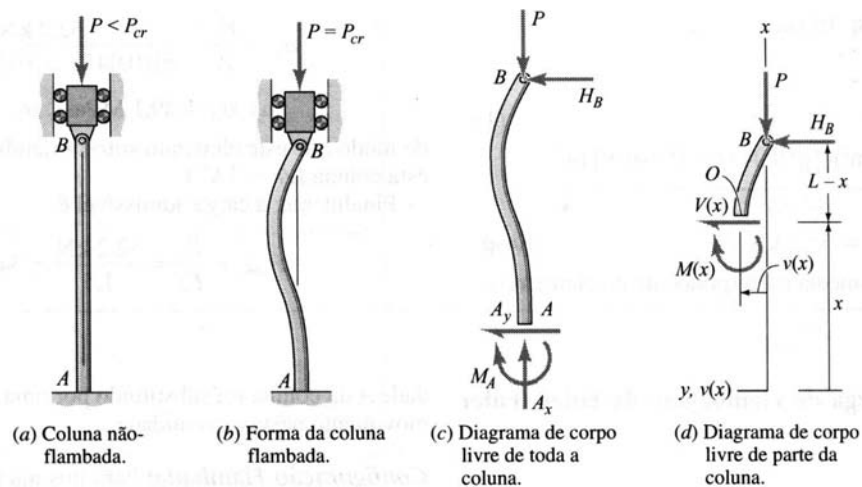


Figura 10 - Condições de contorno

Entretanto, um entendimento do efeito de **condições idealizadas de apoio**, como ilustrado na figura acima, permite ao engenheiro estimar o efeito que as condições reais nas extremidades (figura a), possam ter sobre a carga de flambagem de uma coluna real.

A partir da obtenção da equação de carga de flambagem elástica da coluna com extremidade fixa por um pino (figura d), indicar-se-á como o conceito do **comprimento efetivo de flambagem** pode ser usado para obter a carga de flambagem de colunas com diversas condições de extremidades.

3.3.1. Carga de flambagem para uma coluna ideal com restrição completa em uma extremidade e fixada por pino na outra extremidade



Na figura acima (b), tem-se a configuração flambada da coluna em equilíbrio, próxima à configuração retilínea de equilíbrio (figura a). Se observado esta configuração flambada pode-se notar que a curvatura em **A** corresponde a um momento **MA** no sentido mostrado na figura (c). Através das equações da estática,

$$\bullet \sum F_x = 0 \quad \boxed{Ax = P}$$

$$\bullet \sum M_A = H_B (\leftarrow)$$

Através do diagrama de corpo livre apresentado na figura (d), obtém-se:

$$\sum M_0 = 0 \rightarrow M_x = H_B \cdot (L-x) - P \cdot v(x) \quad (16)$$

Substituindo-se a equação acima na equação diferencial momento – curvatura apresentada anteriormente, tem-se,

$$EIv''(x) = M(x)$$

$$EIv''(x) + P \cdot v(x) = H_B \cdot L - H_B \cdot x \quad (17)$$

Considerando-se apenas colunas uniformes e empregando-se a definição de $v''(x)$, pode-se reescrever a equação anterior da seguinte forma,

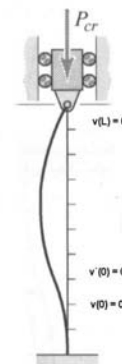
$$v''(x) + \frac{P \cdot v(x)}{EI} = \frac{H_B \cdot L}{EI} - \frac{H_B \cdot x}{EI}$$

$$v''(x) + \frac{P}{EI} \cdot v(x) = \frac{H_B \cdot L}{EI} - \frac{H_B \cdot x}{EI} \quad (18)$$

Em vez da equação diferencial homogênea que obtivemos para a coluna bi-rotulada, neste caso, obtém-se uma **equação diferencial ordinária linear, não homogênea e de segunda ordem com coeficientes constantes**.

As condições de contorno para o caso em questão são:

$$(19) \left\{ \begin{array}{l} v(0) = 0 \\ v'(0) = 0 \text{ (tangente à curvatura vertical)} \\ v(L) = 0 \end{array} \right.$$



A solução da equação diferencial **(18)** com as condições de contorno impostas pelas equações **(19)** consiste em uma solução complementar da solução particular. A solução complementar é obtida igualando-se o lado direito da equação **(18)** igual a zero.

$v''(x) + \frac{P}{EI} \cdot v(x) = 0$, igual à equação **(10)** cuja solução é dada por:

$$v(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

Como o lado direito da equação **(18)** consiste em um termo constante e um termo que é linear em (x) , tenta-se a seguinte solução particular:

$$v_p(x) = C_3 + C_4(x) \quad (20)$$

Substituindo-se essa solução na equação **(18)**, observando-se que $V''_p(x) = 0$ e $\frac{P}{EI} = P / EI$, obtém-se,

$$\frac{P}{EI} \cdot (C_3 + C_4x) = \frac{H_B \cdot L}{EI} - \frac{H_B \cdot x}{EI}$$

$$\frac{P}{EI} \cdot (C_3 + C_4x) = \frac{H_B \cdot L}{EI} - \frac{H_B \cdot x}{EI} \quad (21)$$

$$V_p(x) = \frac{H_B \cdot L}{P} - \frac{H_B \cdot x}{P} \quad (22)$$

Finalmente, a solução geral completa é dada por:

$$V(x) = \frac{H_B \cdot L}{P} - \frac{H_B \cdot x}{P} + C_1 \sin x + C_2 \cos x \quad (23)$$

Desta forma, têm-se três condições de contorno para obtenção das quatro constantes $\frac{H_B \cdot L}{P}$, $\frac{H_B \cdot x}{P}$, C_1 e C_2 .



• $v(0) = 0 \Rightarrow$ $C_2 = \frac{-H_B \cdot L}{P}$ (24)

$v'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-H_B}{P} + C_1 \cos x - C_2 \sin x \Rightarrow$ $C_1 = \frac{H_B}{P}$ (25)

• $v(L) = 0 \Rightarrow C_1 \sin L + C_2 \cos L = 0$ (26)

Combinando-se as equações (24) e (26), tem-se,

$$C_1 \sin L - \frac{H_B \cdot L}{P} \cdot \cos L = 0 \quad (\text{sendo que } \frac{H_B}{P} = C_1)$$

$$C_1 [\sin L - \cos L] = 0 \tag{27}$$

Esta equação substitui a condição muito mais simples que foi obtida para a coluna bi-apoiados. Novamente, duas soluções, mas a solução $C_1 = 0 \Rightarrow H_B = C_2 = 0$, de modo que se obtém a solução “trivial” da configuração retilínea do equilíbrio, $v(x) = 0$.

Porém, **configurações de equilíbrio alternativas** são possíveis se satisfaz a seguinte equação:

$$\sin(n \cdot L) - (n \cdot L) \cdot \cos(n \cdot L) = 0$$

$$\text{tg}(n \cdot L) = n \cdot L, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{28}$$

Esta equação é chamada de **equação característica**. Existe um número infinito de soluções, mas como o caso da coluna bi-apoiados, deseja-se obter o menor valor de $n \cdot L$ que satisfaça a equação acima. Um modo de se resolver esta equação é plotar:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(n \cdot L) \equiv \text{tg}(n \cdot L) \cdot n \cdot L \\ g(n \cdot L) \equiv n \cdot L \cdot n \cdot L \end{array} \right.$$

O menor valor de $n \cdot L$ onde as curvas se interceptam é:

$n \cdot L = 4,4934$

(29)

Combinando este valor com a equação $P^2 = P / EI$, tem-se:

$$= \frac{4,4934}{L} = \frac{20,1906}{L^2} = \frac{P_{cr}}{EI} \quad (30)$$

$$P_{cr} = \frac{(20,1906) \cdot EI}{L^2} \quad (31)$$

Desta forma, conclui-se que ao substituir o pino pelo engaste na extremidade de uma coluna aumenta-se em 5% a carga de flambagem desta coluna,

$$\left(\frac{20,1906 - 2}{2} \right) \cdot 100\% = 104,6\%$$

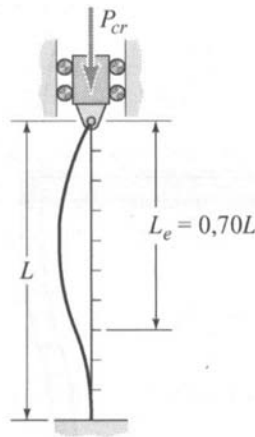
Comparando-se as equações de P_{cr} obtidas para dois casos abordados até o presente momento, nota-se que a carga de flambagem elástica de qualquer coluna pode ser expressa como uma constante vezes o fator (EI / L^2) . Sendo assim, todos os comentários em relação aos efeitos dos parâmetros E, I e L na flambagem de colunas com extremidades fixas também são válidos para colunas com outras condições de fixação das extremidades.

3.3.2. Comprimento Efetivo de Colunas

A carga de flambagem de Euler, equação (13), foi desenvolvida para uma coluna bi-rotulados. Posteriormente, com as modificações nas condições de contorno, obteve-se a carga de flambagem para uma coluna engastada e rotulada que difere da primeira apenas n valor da constante multiplicativa.

Desta forma, a equação de Euler pode ser estendida pra dar a carga de flambagem elásticas de colunas com condições de contorno arbitrárias sendo reescrita como,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}, \text{ onde } L_e \text{ é o comprimento efetivo da coluna.}$$

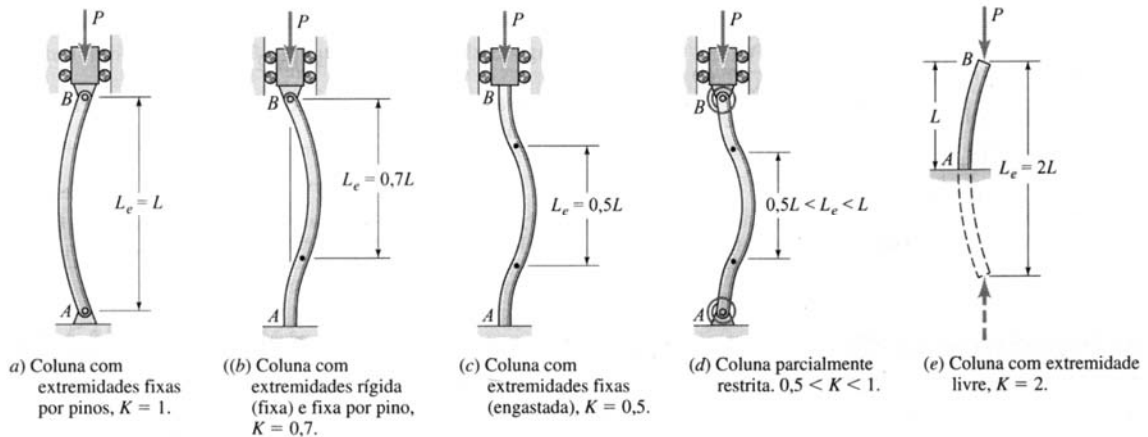


Igualando-se as duas equações de P_{cr} obtidas para os dois casos estudados, tem-se,

$$\frac{2}{L_e^2} = \frac{20,1906}{L^2} \quad , \quad \boxed{L_e = 0,70.L} \quad (32)$$

Este comprimento efetivo de coluna com uma extremidade engastada e outra rotulada é indicado na figura ao lado. Fisicamente, o comprimento efetivo de uma coluna é a distância entre pontos de momento nulo, quando a coluna é fletida em seus modos fundamentais de flambagem elástica.

A figura a seguir ilustra os comprimentos efetivos de colunas com diversos tipos de condições de contorno.



Algumas normas de projeto de estruturas empregam um coeficiente adimensional K , chamado de fator de comprimento efetivo, onde

$$L_e \equiv K \cdot L \quad (33)$$

Desta forma, a carga de flambagem elástica passa a ser dada por,

$$\boxed{P_{cr} = \frac{2 EI}{(K.L)^2}} \quad (34)$$

Onde os valores de K estão indicados na figura anterior.

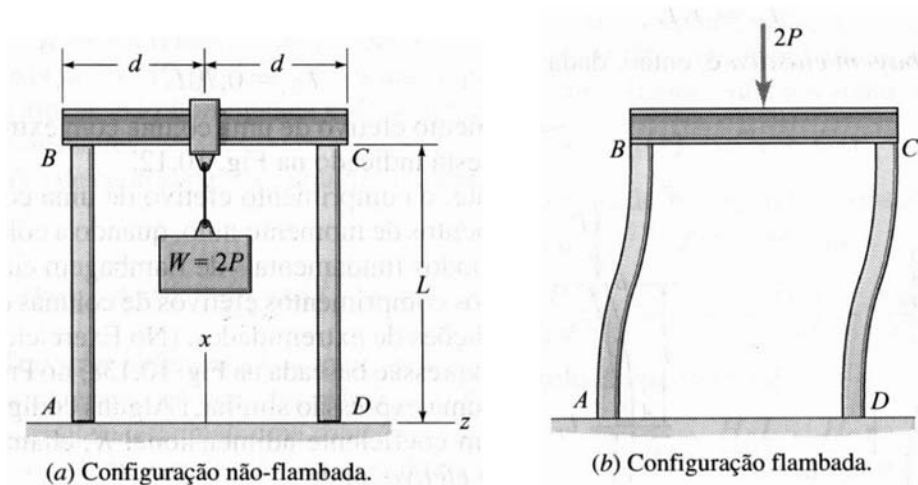
E a equação para a tensão elástica de flambagem pode ser reescrita como,

$$\Sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{K.L}{r}\right)^2} \quad (35)$$

Onde $(K.L / r)$ é o índice de esbeltez multiplicado pelo fator de comprimento efetivo.

Exemplo 1.3

Uma viga rígida BC é sustentada por duas colunas idênticas cuja rigidez à flexão é EI (para flexão no plano xy). Considerando que as colunas são impedidas de girar em ambas as extremidades devido a esta configuração e que o movimento lateral é permitido, estimar a carga elástica de flambagem, P_{cr} , considerando-se o comprimento efetivo das colunas.



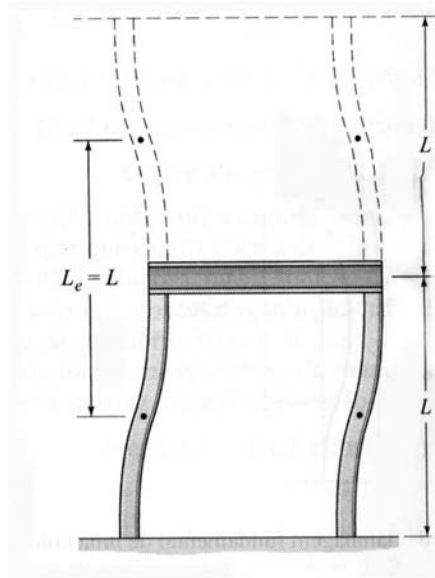
Solução:

Para estimar o comprimento efetivo de flambagem das colunas do pórtico acima, devem-se comparar estas com colunas de referência de comprimentos efetivos.

$$L_e = 0,5 \cdot (2 \cdot L) = L$$

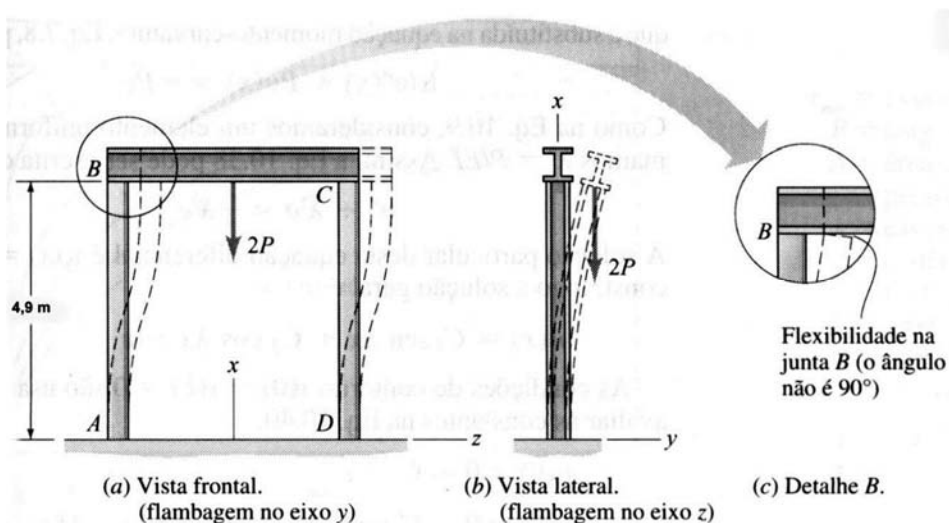
$$\text{Logo, } P_{cr} = \frac{2EI}{K \cdot L^2}$$

Onde o fator de comprimento efetivo é $K = 1$.

**Exemplo 1.4**

No exemplo anterior, considerou-se a flambagem das colunas AB e CD no plano xy. Entretanto, suponha que não exista nada para prevenir as colunas de flambar na direção y, figura (b). Determinar se as colunas AB e CD, do tipo W6x20 (padrão americano), vão flambar no plano xy (flambagem no eixo y), ou se elas vão flambar na direção y (flambagem no eixo z). Pede-se determinar também a carga de flambagem. Considere que as ligações em B e C são rígidas, que a viga BC é rígida e que a carga P é aplicada no centróide do topo de cada coluna.

- Dados: $E = 200 \text{ GPa}$; $\Sigma_y = 250 \text{ MPa}$; $I = 553,6 \text{ cm}^4$



$$I_z = 1.723,2 \text{ cm}^4 ; A = 3.787,1 \text{ mm}^2 \text{ e } L = 4,9 \text{ m}$$

• **Solução:**

$$P_{cr,y} = \frac{2 E I_y}{(K_y \cdot L)^2} \quad \text{e} \quad P_{cr,z} = \frac{2 E I_z}{(K_z \cdot L)^2}$$

$K_y = 1$ e $K_z = 2$ (coluna engastada e livre)

$$P_{cr,y} = \frac{2 \cdot 200.10^3 \text{ N/mm}^2 \cdot 553,6 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}{(1 \cdot 4,9 \cdot 10^3)^2 \text{ mm}^2} = 455,1 \text{ KN}$$

$$P_{cr,z} = \frac{2 \cdot 200.10^3 \text{ N/mm}^2 \cdot 1.723,2 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}{(2 \cdot 4,9 \cdot 10^3)^2 \text{ mm}^2} = 354,1 \text{ KN}$$

Como $P_{cr,z} < P_{cr,y}$, as colunas flambarão no modo fora do plano conforme indicado na figura (b) para uma carga de 354,1 KN.

Comentários sobre a solução:

- Caso as ligações em B e C não fossem suficientemente rígidas, estes nós poderiam girar um pouco;
- A pior situação seria para aquela na qual as colunas seriam presas por pinos e não fixadas à viga BC. Como a viga BC é livre para transladar horizontalmente, $K_y = 2$

$$(P_{cr,y})_{\text{BALANÇO}} = \frac{2 \cdot 200.10^3 \text{ N/mm}^2 \cdot 553,6 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}{(2 \cdot 4,9 \cdot 10^3)^2 \text{ mm}^2} = 113,8 \text{ KN}$$

- Comparando-se os dois valores obtidos, verifica-se a importância de caracterizar corretamente as condições de uma coluna e aplicar um fator de segurança apropriado, para levar em consideração as incertezas nas condições de extremidades;

•

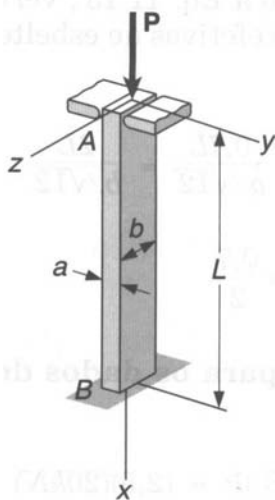
- O valor mais conservador seria,

$$P_{cr,y} = (P_{cr,y})_{\text{BALANÇO}} = 113,8 \text{ kn}$$

- A tensão média de compressão seria,

$$\Sigma_{cr} = \frac{113,8 \cdot 10^3 \text{ N}}{3.787,1 \text{ mm}^2} =$$

$\Sigma_{cr} = 30 \text{ MPa} < 250 \text{ MPa}$ de modo que a hipótese de que a flambagem elástica é válida.



Exemplo 1.5 - Uma coluna de alumínio de seção transversal retangular tem comprimento L e extremidade engastada em B. A coluna suporta uma carga centrada em sua extremidade A. Na extremidade A da coluna, existem duas placas rígidas de cantos arredondados que impedem essa extremidade de se movimentar em um dos planos verticais de simetria da coluna, mas não impedem movimentos na direção do outro plano:

- Determinar a relação a/b entre os lados da seção transversal que corresponde à solução de projeto mais eficiente contra flambagem;
- Dimensionar a seção transversal mais eficiente para a coluna, sabendo-se que $L = 500 \text{ mm}$, $E = 70 \text{ GPa}$, $P = 20 \text{ kN}$ e que o coeficiente de segurança deve ser de 2,5.

• **Solução:**

Flambagem no plano xy

$$L_e = 0,7L$$

$$I_z = \frac{a^3 b}{12} \text{ e } A = ab \quad \text{mas} \quad I_z = a \cdot (r_z)^2$$

$$12$$

$$(r_z)^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{a^3 b}{12} \cdot \frac{1}{ab} =$$

$$r_z = \sqrt{\frac{a^2}{12}}, \quad r_z = \frac{a}{\sqrt{12}}$$

o índice de esbeltez será,

$$\begin{aligned} Le &= 0,7L \\ r_z &= \frac{a}{\sqrt{12}} \end{aligned}$$

A flambagem no plano xz,

$$Le = 2L$$

$$I_Y = \frac{a b^3}{12} \Rightarrow (r_Y)^2 = \frac{a^3 b}{12} \cdot \frac{1}{ab}$$

$$r_Y = \frac{b}{\sqrt{12}}$$

$$\begin{aligned} Le &= 0,7L \\ r_z &= \frac{b}{\sqrt{12}} \end{aligned}$$

a) Dimensionamento mais eficiente

O dimensionamento mais eficiente é aquele para o qual suas tensões que correspondem aos dois modos possíveis de flambagem são iguais,

$$\frac{0,7L}{a/\sqrt{12}} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}}$$

Logo,

$$a / b = 0,35$$

b) Para os dados do problema,

$$P_{cr} = 2,5 \cdot 20 = 50 \text{ KN}$$

$$\text{Se } a = 0,35b \text{ , } A = 0,35b^2 \text{ e}$$

$$\Sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{50 \cdot 10^3 \text{ N}}{0,35b^2} \text{ como } L = 0,5 \text{ m}$$

$$\underline{L_e} = \underline{2L} = \underline{L_e} = \underline{2(0,5)} = \underline{3,464}$$

$$r_y = \frac{b}{\sqrt{12}} \quad \frac{b}{\sqrt{12}} \quad b$$

$$\Sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{(L/r)^2} \cdot E \Rightarrow \frac{50 \cdot 10^3 \text{ N}}{0,35b^2} = \frac{P_{cr}}{(3,464/b)^2} \cdot (70 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2)$$

$$b = 39,7 \text{ mm}$$

$$\text{e } a = 0,35 \cdot 39,7 \text{ mm} \Rightarrow$$

$$a = 13,9 \text{ mm}$$

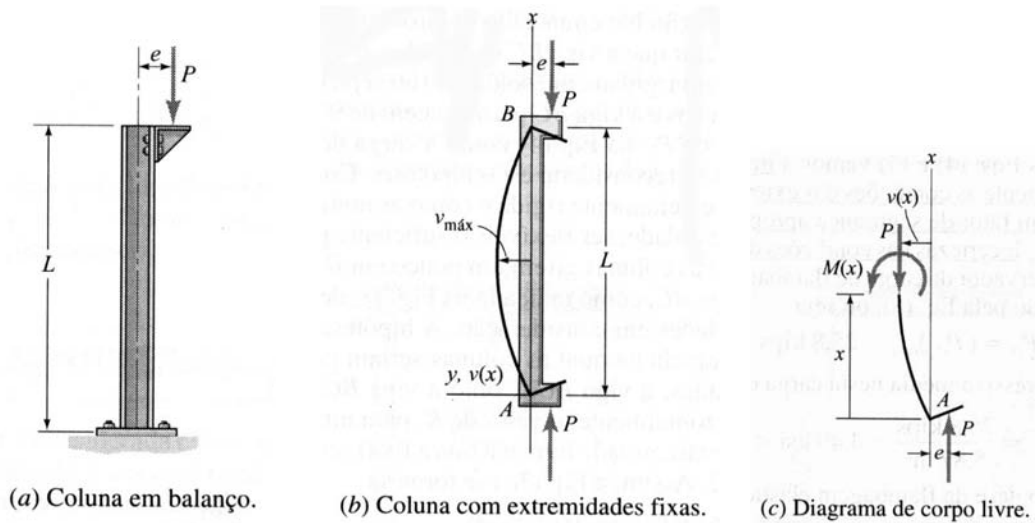
1.5 Carregamentos Excêntricos – Equação da Secante

Até o presente momento, formas consideradas colunas ideais, ou seja, colunas que estão inicialmente perfeitamente retilíneas e cuja carga de compressão é aplicada através do centróide da seção transversal do elemento.

Tais condições ideais nunca existem na verdade, pois elementos estruturais perfeitamente retos não podem ser fabricados, isto porque o ponto de aplicação da carga dificilmente, se é que existirá, situa-se exatamente no centróide da seção transversal.

1.5.1 Comportamento Viga-Coluna

A figura a seguir, mostra uma coluna com uma carga excêntrica aplicada através de um suporte. O caso a ser estudado compreende uma coluna bi-apoiados como mostrada a seguir, com carregamento excêntrico.



- Se a excentricidade $e = 0$, coluna de Euler;
- Se $e \neq 0$, usar o diagrama de corpo-livre da figura (c);

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M(x) = -P \cdot e - P \cdot v(x)$$

Substituindo-se na equação de momento x curvatura,

$$EIv''(x) + P \cdot v(x) = -P \cdot e$$

Dividindo-se tudo por EI e lembrando que $\lambda^2 = P / EI$

$$v''(x) + P / EI = -P \cdot e / EI$$

$$v'' + \lambda^2 v = -\lambda^2 \cdot e$$

A solução particular desta equação diferencial é $v_p(x) = -e = \text{constante}$. Logo, a solução geral é dada por:

$$v(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x - e$$

As condições de contorno são,

$$v(0) = 0 \text{ e } v(L) = 0$$

Aplicando estas condições de contorno na solução geral, tem-se,

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) - e$$

$$C_2 = e$$

$$v(L) = C_1 \sin L + e \cos L - e$$

$$v(L) = C_1 \sin L + e [\cos(L) - 1] = 0$$

$$\text{mas } \sin L = 2 \cdot \sin(L/2) \cdot \cos(L/2) \text{ e } 1 - \cos L = 2 \sin^2(L/2)$$

$$\text{logo, } C_1 \sin L = e [1 - \cos(L)]$$

$$C_1 \cdot 2 \cdot \sin(L/2) \cdot \cos(L/2) = e \cdot 2 \sin^2(L/2)$$

$$C_1 \cos(L/2) = e \cdot \sin(L/2) \Rightarrow C_1 = e \cdot \operatorname{tg}(L/2)$$

Desta forma,

$$v(x) = e \cdot [\operatorname{tg}(L/2) \cdot \sin(x) + \cos(x) - 1]$$

Como indicado na figura no início do tópico, a deflexão máxima viga coluna ocorre em $x = L/2$. Seu valor é:

$$v_{\max} = v(L/2) = e [\operatorname{tg}(L/2) \cdot \sin(L/2) + \cos(L/2) - 1]$$

$$v_{\max} = e \left(\frac{\sin(L/2) \cdot \sin(L/2) + \cos(L/2) - 1}{\cos(L/2)} \right)$$

$$v_{\max} = e \left(\frac{\sin^2(L/2) + \cos(L/2) - 1}{\cos(L/2) (\cos(L/2))^{-1} (\cos(L/2))^{-1}} \right)$$

$$v_{\max} = e \left(\frac{\sin^2(L/2) + \cos^2(L/2) - \cos(L/2)}{\cos(L/2)} \right)$$

$$v_{\max} = e \cdot \left(\frac{1}{\cos(L/2)} - 1 \right) \Rightarrow v_{\max} = e [\operatorname{sen}(L/2) - 1]$$

Diferente da coluna de Euler, que deflete lateralmente apenas se P se iguala ou excede a carga de flambagem de Euler, P_{cr} , a deflexão lateral de um elemento carregado excentricamente ocorre para qualquer valor de carga P .

Lembrando-se que $k^2 = P/EI$ e $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$, tem-se,

$$v_{\max} = e. \left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \frac{L}{2}\right) - 1 \right] \text{ atinge um máximo (valor infinito) quando, } \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Embora a deflexão realmente não atinja um valor infinito, ela se torna inaceitavelmente grande. Assim, a carga P não deve atingir o valor crítico que satisfaz à equação anterior.

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{P}{EI} \cdot \frac{L^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} \rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}}$$

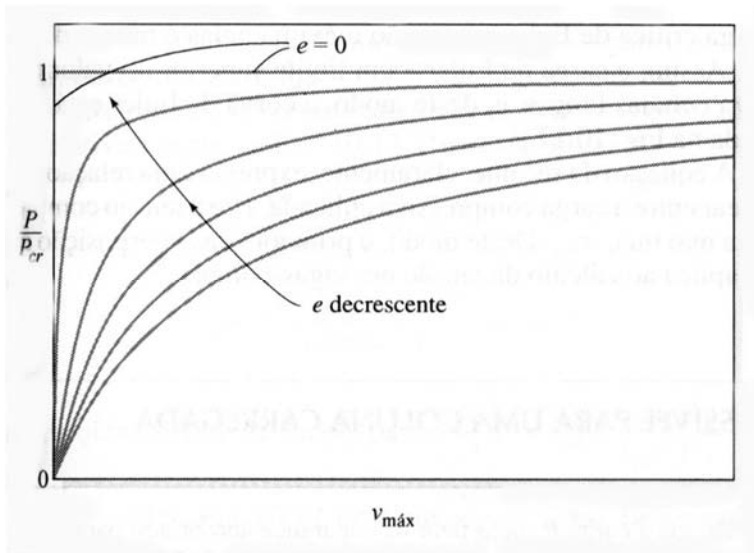
Que é o mesmo valor para o caso de carga centrada. Calcula-se o valor EI na equação anterior e substitui-se na equação de v_{\max} .

$$EI = \frac{P_{cr} \cdot L^2}{\pi^2}$$

$$v_{\max} = e. \left[\sec\left(\sqrt{\frac{P \cdot L^2}{P_{cr} L^2}} \cdot \frac{L}{2}\right) - 1 \right]$$

$$v_{\max} = e. \left[\sec\left(\frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) - 1 \right]$$

A equação acima é uma forma alternativa de se expressar a deflexão máxima para uma viga-coluna. É conveniente plotar esta equação para diversos valores de e .

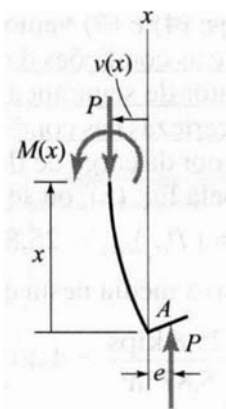


À medida que P se aproxima da carga de Euler, P_{cr} , a deflexão lateral da viga coluna aumenta sem limite. No limite, quando e tende a zero, a curva se torna duas linhas retas que representam a configuração a configuração retilínea ($P < P_{cr}$) e a configuração flambada ($P = P_{cr}$).

A análise de viga-coluna anterior é válida apenas enquanto a tensão de compressão não exceder o limite de proporcionalidade em compressão.

1.5.2 Equação da Secante

Um elemento sob um esforço do tipo viga-coluna está submetido a uma combinação de carga expressiva axial P e momento fletor $M(x)$, como indicado pelo diagrama de corpo livre apresentado anteriormente.



O momento máximo (em valor absoluto) ocorre em $x = L/2$ e é obtido combinando as equações de $M(x)$ em $v_{máx}$ em $x = L/2$.

$$M(x) = -P \cdot [e + v(x)]$$

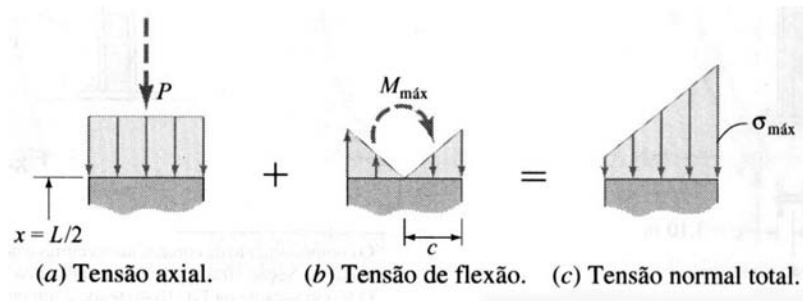
$$v_{máx} = v(L/2) = e \cdot \left[\sec\left(\frac{L}{2}\right) - 1 \right]$$

$$M_{máx} = P \cdot e \left[1 + \sec\left(\frac{L}{2}\right) - 1 \right] \Rightarrow$$

$$M_{máx} = \left| M\left(\frac{L}{2}\right) \right| = +P \cdot e \sec\left(\frac{L}{2}\right)$$

Esta tensão também é obtida pela soma da tensão normal devida à força axial e da

tensão normal devido ao momento fletor que atuam naquela seção.



$$\Sigma_{MÁXMIO} = \frac{P}{A} + \frac{M_{máximo} \cdot C}{I}$$

Combinando a equação de $M_{máx}$ com a equação de $\Sigma_{máx}$, tem-se,

$$\Sigma_{MÁXMIO} = \frac{P}{A} + \frac{P \cdot e \cdot c}{I} \sec\left(\frac{L}{2}\right)$$

Lembrando que $I = r^2 \cdot A$ e $e = \sqrt{\frac{P}{EI}}$, tem-se,

$$\Sigma_{MÁXMIO} = \frac{P}{A} + \frac{P \cdot e \cdot c}{A \cdot r^2} \sec\left(\frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}\right) \Rightarrow I = A \cdot r^2$$

$$\Sigma_{MÁXMIO} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{e \cdot c}{r^2} \sec\left(\frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P}{AE}}\right) \right] \text{ Equação da Secante,}$$

onde $\Sigma_{máx}$ = máxima tensão de compressão na viga-coluna

P = carga de compressão excêntrica

A = área da seção transversal do elemento em compressão

e = excentricidade da carga

c = distância do centróide até a fibra mais externa onde $\Sigma_{máx}$ atua

I = Momento de inércia em relação ao eixo de flexão do centróide

$$r = \text{raio de giração} = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

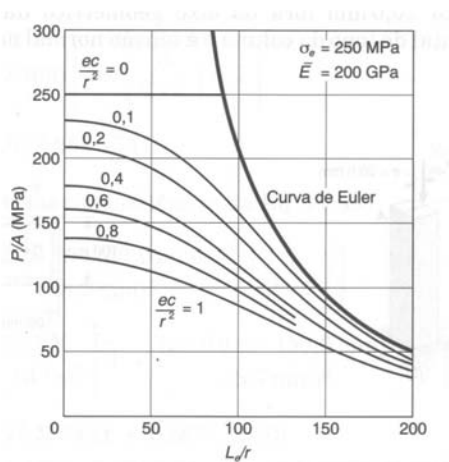
L = comprimento do elemento

A equação da secante, embora tenha sido obtido para uma coluna bi-rotulados, também é válida para colunas em balanço substituindo-se o comprimento L pelo comprimento efetivo da coluna em balanço, $L_e = 2L$.

A tensão $\Sigma_{\text{máx}}$ não varia linearmente com a carga P , de modo que não deve ser aplicado o princípio da superposição dos efeitos para a determinação das tensões provocadas por várias cargas aplicadas simultaneamente. Deve-se primeiramente calcular a resultante dos carregamentos, para depois obter-se $\Sigma_{\text{máx}}$. Pela mesma razão, qualquer coeficiente de segurança deve ser aplicado ao carregamento e não à tensão.

Para determinar a carga de compressão máxima que pode ser aplicada a uma dada excentricidade, a uma coluna de comprimento e material dados e sem causar escoamento do material, pode-se fazer $\Sigma_{\text{máx}} = \Sigma_y$, o limite de escoamento em compressão e resolver a equação de $\Sigma_{\text{máx}}$ para P/A , a tensão média.

P/A nos dois termos \rightarrow tensão transcendente \rightarrow solução por tentativas.



As curvas ao lado foram traçadas usando-se a equação de $\Sigma_{\text{máx}}$ para um aço com $\Sigma_y = 250$ MPa e $E = 200$ GPa.

Estas curvas tornam possível a determinação da carga por unidade de área, P/A , que provoca escoamento na coluna em valores de L_e/r e $e.c./r^2$ conhecidos.

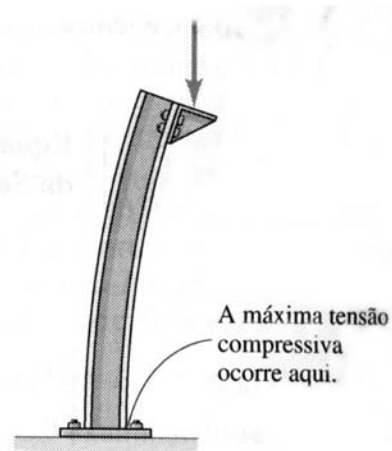
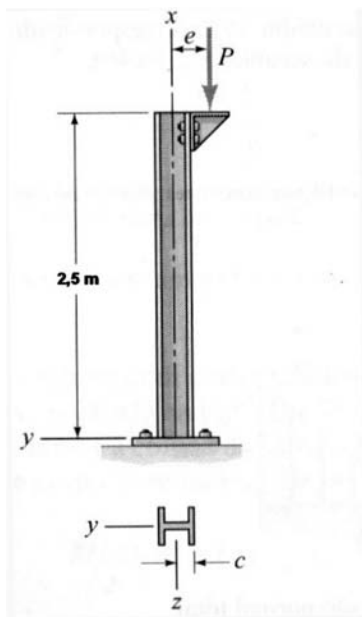
Para valores pequenos de L_e/r , a secante é aproximadamente igual a 1 e a equação de $\Sigma_{m\acute{a}x}$ pode ser reescrita como,

$$\Sigma_{m\acute{a}x} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{e \cdot c}{r^2} \right] \rightarrow \boxed{\frac{P}{A} = \frac{\Sigma_{m\acute{a}x}}{1 + \frac{e \cdot c}{r^2}}}$$

- Procedimentos para determinação da carga admissível para uma coluna carregada excentricamente.
 - a) Obter ou estimar, o valor da excentricidade e ;
 - b) Substituir o valor de e na equação da secante, juntamente com os parâmetros geométricos r , c , A e L , e as propriedades do material E e Σ_y (ou seja, $\Sigma_{m\acute{a}x} = \Sigma_y$) e determinar a carga P_y .
 - c) Dividir a carga P_y pelo fator de segurança apropriado para determinar a carga admissível.

Exemplo 1.6

Uma coluna de aço estrutural **W6x20** com $E = 200 \text{ MPa}$ e $\Sigma_y = 250 \text{ MPa}$ está carregada excentricamente como mostrado a seguir. Considere que a carga é aplicada diretamente na seção transversal do topo, embora com uma excentricidade e . A coluna está travada para evitar a flambagem para fora do plano.



- a) Se uma carga de compressão $P = 90 \text{ kN}$ é aplicada com uma excentricidade

$e = 100 \text{ mm}$, qual a tensão de compressão máxima na coluna?

- b) Qual o fator de segurança contra o escoamento inicial da coluna submetida ao carregamento acima?

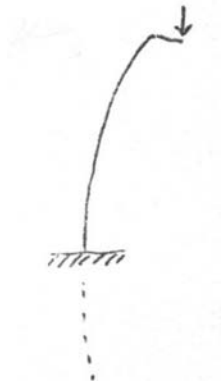
Dados:

$$A = 3.787,1 \text{ mm}^2; r = 67,56 \text{ mm e } c = 78,74 \text{ mm}$$

• **Solução**

a) **Tensão de compressão máxima**

Como observamos anteriormente, a tensão máxima de compressão em uma coluna em balanço pode ser calculada diretamente através da equação da secante com $Le = 2L$.



$$\Sigma_{m\acute{a}x} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{e \cdot c}{r^2} \cdot \sec \left(\frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P}{AE}} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\Sigma_{m\acute{a}x} = \frac{90 \cdot 10^3 \text{ N}}{3.787,1 \text{ mm}^2} \left[1 + \frac{100 \cdot (78,54)}{(67,56)^2} \cdot \sec \left(\frac{2 \cdot (2,5 \cdot 10^3 \text{ mm})}{2 \cdot 967,56} \sqrt{\frac{90 \cdot 10^3}{3.787,1 \cdot (200 \cdot 10^3)}} \right) \right]$$

$$\Sigma_{m\acute{a}x} = 64,7 \text{ MPa}$$

b) **Fator de segurança**

Como a equação da secante é não-linear, deve-se determinar o valor da carga P_y que satisfaça $\Sigma_{m\acute{a}x} = \Sigma_y$, a tensão de escoamento de compressão.

$$\checkmark \text{ Esbeltez : } \frac{Le}{r} = \frac{2 \cdot (2,5 \cdot 10^3)}{67,56}$$

$$\checkmark \frac{e \cdot c}{r} = \frac{100 \cdot (78,54)}{(67,56)^2}$$

Interpolando-se nas curvas de $(e \cdot c/r^2) = 1$ e $(e \cdot c/r^2) = 2$ em $Le/r = 74$, obtém-se

$$\frac{P_y}{A} = 83,3 \text{ MPa} \Rightarrow P_y = 83,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 3787,1 \text{ mm}^2$$

$$P_y = 315,6 \text{ KN}$$

Comparando-se com o valor de P_y que satisfaz a equação da secante para $\Sigma_{\text{máx}} = \Sigma_y = 250 \text{ MPa}$, tem-se,

$$250 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \frac{P_y}{3.787,1} \left[1 + 1,725 \cdot \sec \left(\frac{74}{2} \sqrt{\frac{P_y}{3.787,1 \cdot (200 \cdot 10^3)}} \right) \right]$$

$$946.775 = P_y \left[1 + 1,725 \sec \left(0,00134 \sqrt{P_y} \right) \right]$$

Logo, a carga calculada que causará o início do escoamento será:

$$P_y = 347,4 \text{ KN}$$

Como a carga real na coluna é $P = 90 \text{ KN}$, o fator de segurança em relação ao escoamento será:

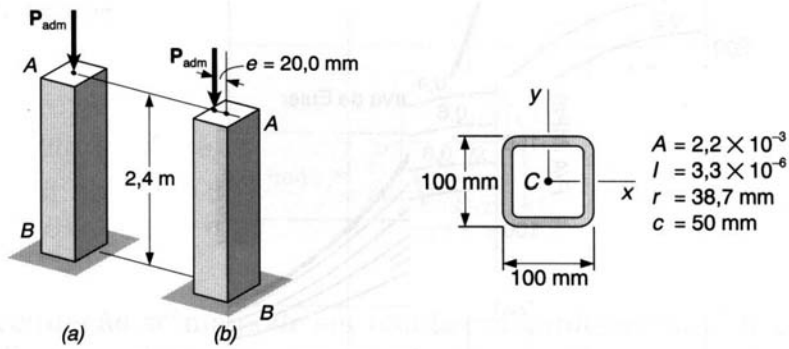
$$F.S = \frac{P_y}{P} = \frac{347,4}{90} = 3,86 \text{ (este fator de segurança é baseado nas cargas e}$$

não nas tensões, $\Sigma_y / \Sigma_{\text{máx}}$).

Exemplo 1.7

A coluna de seção uniforme apresentada a seguir é constituída de um tubo com 2,4 m de comprimento.

- Determinar pela fórmula de Euler com coeficiente de segurança igual a 2,0, a carga centrada admissível para a coluna e tensão normal correspondente;
- Supondo-se que o valor da carga admissível encontrada em (a) seja aplicado a um pondo 20,0 mm fora do eixo da coluna, determinar o deslocamento horizontal do topo da coluna e a tensão normal máxima que ocorre. Usar $E = 200 \text{ GPa}$.



• Comprimento Efetivo de flambagem

$$L_e = 2.L = 2.(2,4) = 4,8 \text{ m}$$

• Carga crítica de Euler

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L_e)^2} = \frac{\pi^2 (200 \cdot 10^3) (3,3 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^{12}}{(4,8 \cdot 10^3)^2} = 282.723 \text{ N}$$

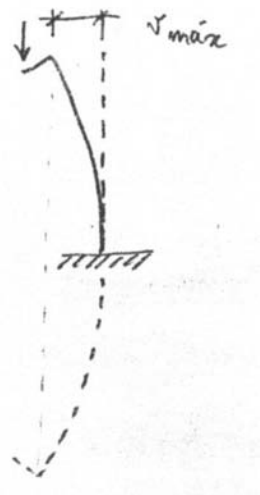
$$P_{cr} = 282,7 \text{ KN}$$

a) Carga Admissível

$$P_{adm} = \frac{P_{cr}}{F.S} = \frac{282,7}{2} = 141,4 \text{ KN}$$

$$P_{adm} = 141,4 \text{ KN}$$

b) Deslocamento Horizontal em A e $\Sigma_{m\acute{a}x}$



$$v_{m\acute{a}x} = e \left[\sec \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) - 1 \right]$$

=>

$$\left(\frac{P}{P_{cr}} = \frac{P_{adm}}{P_{cr}} \right)$$

$$v_{m\acute{a}x} = 20 \left[\sec \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \right) - 1 \right]$$

$$v_{m\acute{a}x} = 20 \left[\sec (63,64^\circ) - 1 \right]$$

$$v_{m\acute{a}x} = 20 (2,252 - 1)$$

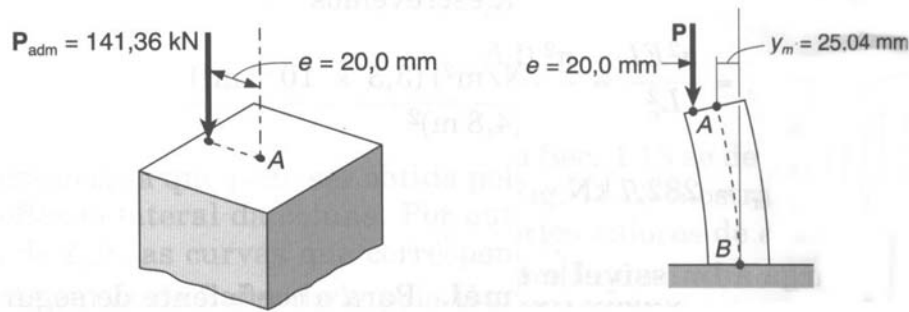
$$v_{m\acute{a}x} = 25,04 \text{ mm}$$

$$v_{m\acute{a}x} = 25,04 \text{ mm}$$

$$\Sigma_{m\acute{a}x} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{e \cdot c}{r^2} \cdot \sec \left(\frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P}{AE}} \right) \right]$$

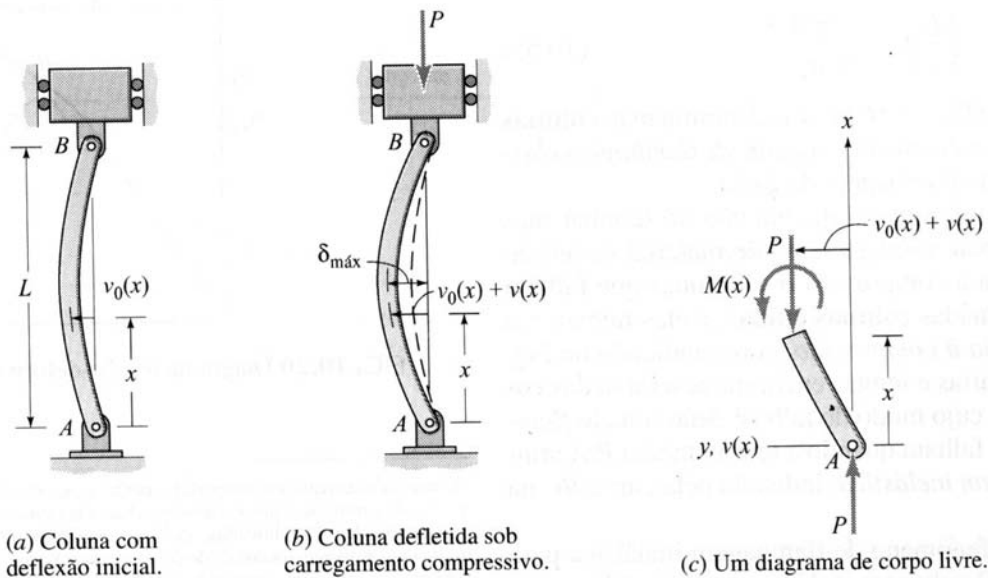
$$\Sigma_{m\acute{a}x} = \frac{141,36 \cdot 10^3}{2,2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6} \left[1 + \frac{20 \cdot (50)}{(38,7)^2} \cdot \sec \left(\frac{4,8 \cdot 10^3}{2 \cdot (38,7)} \sqrt{\frac{141,36 \cdot 10^3}{2,2 \cdot 10^{-3} \cdot (200 \cdot 10^3)}} \right) \right]$$

$$\Sigma_{m\acute{a}x} = 64,25 [1 + 0,668 \cdot \sec(63,69^\circ)] \quad \Sigma_{m\acute{a}x} = 141,1 \text{ MPa}$$



1.6 Imperfeições de Colunas

Foi mostrado anteriormente, como o comportamento das colunas é afetado quando a carga é aplicada excêntrica. O comportamento de uma coluna também pode ser afetado devido às imperfeições iniciais conforme mostrado a seguir.



(a) Coluna com deflexão inicial.

(b) Coluna defletida sob carregamento compressivo.

(c) Um diagrama de corpo livre.

A coluna bi-rotulados possui agora uma imperfeição inicial chamado $v_0(x)$. Apesar de $v_0(x)$ ser normalmente pequeno, sua forma funcional exata difere de coluna para coluna e é desconhecida. No entanto, pode ser representado por

$$v_0(x) = f_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Que tem a mesma forma do modo fundamental de flambagem obtido na seção 1.3.2,

$$v(x) = C \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Do diagrama de corpo livre, obtém-se,

$$M(x) = -P[v(x) + v_0(x)]$$

↳ Deflexão causada pela carga P

Combinando as equações anteriores com a equação momento x curvatura,

$$EIv'' + P \cdot v(x) = -P \cdot f_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Cuja solução pra as condições de contorno $v(0) = v(L) = 0$, é

$$v(x) = \left(\frac{f_0}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\text{onde } \frac{P}{P_{cr}} = \frac{P \cdot L^2}{\pi^2 \cdot EI}$$

Da equação de $v(x)$ pode-se determinar a deflexão máxima, $v_{\text{máx}}$, e o momento fletor máximo, $M_{\text{máx}}$, da seguinte maneira:

$$v_{\text{máx}} = f_0 + v(L/2) = f_0 + \frac{f_0}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi \cdot L/2}{L}\right)$$

$$v_{\text{máx}} = \frac{f_0(1 - \frac{P}{P_{cr}}) + f_0}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \Rightarrow v_{\text{máx}} = \frac{f_0}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}$$

Logo,

$$M_{\text{máx}} = P \cdot v_{\text{máx}} \Rightarrow M_{\text{máx}} = \frac{P \cdot f_0}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}$$

Então,

$$\boxed{\Sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\text{máx}} \cdot c}{I}} \Rightarrow \Sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{f_0 \cdot c}{r^2 \cdot (1 - \frac{P}{P_{cr}})} \right]$$

Novamente, como $\sigma = P/P_{cr}$, as equações de $\sigma_{m\acute{a}x}$, $M_{m\acute{a}x}$, e $\Sigma_{m\acute{a}x}$ são todas não lineares em relação a carga P .

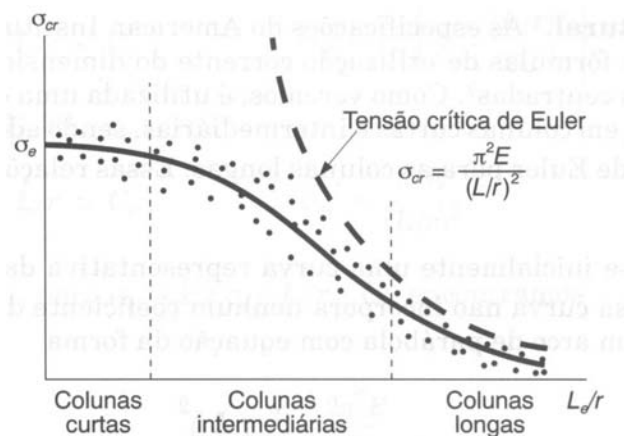
A razão de imperfeição $\sigma_0 c/r^2$ pode ser usada na determinação de uma família de curvas de $\sigma_y/A \times L/r$ para uma dada tensão de escoamento pra compressão $\Sigma_{m\acute{a}x} = \Sigma_y$. O resumo é bastante similar às curvas obtidas no caso de colunas ideais, ou seja, sem imperfeições iniciais.

1.7 Projetos de Colunas Submetidas a Carregamento Centrado

Nas seções anteriores, examinou-se o comportamento de colunas com geometrias conhecidas (perfeitamente retas ou com uma forma específica de imperfeição), com comportamento conhecido (livres de qualquer tensão residual e possuindo um diagrama $\Sigma \times \epsilon$ em compressão conhecido), com condições de contorno conhecidas (fixas por nós, fixas ou livres) e com linha de ação da carga conhecida. Para colunas reais, todos esses fatores, além de outros, estão sujeitos a variação que devem ser levadas em consideração no projeto de colunas.

Desta forma, as normas de projeto especificam equações empíricas para projeto de colunas que são obtidas por ajuste de curvas nos dados obtidos em testes em laboratório de muitas colunas reais e que incorporam fatores de segurança apropriados, fatores de comprimento efetivo e outros fatores de modificação.

- Ensaaios de colunas do aço com carregamento centrado.
- $P \rightarrow P_{ruptura} \rightarrow \Sigma_{crítico}$ (tensão de ruptura)
- Três tipos de ruptura



a) Colunas longas

Ruptura segundo Euler $\rightarrow L/r$ é alto (dependo do módulo de elasticidade)

b) Colunas curtas ou blocos comprimidos

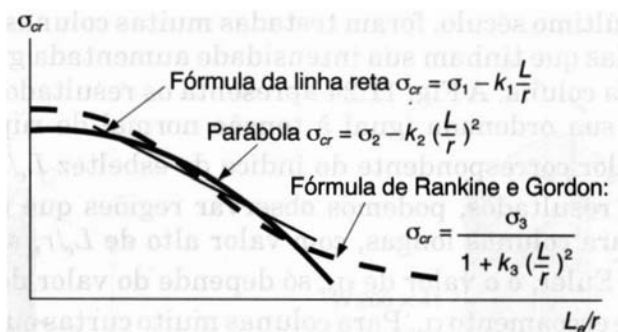
A ruptura ocorre essencialmente como resultado do escoamento, ou seja, $\Sigma_{cr} = \Sigma_e$

c) Colunas de comprimento intermediário

A ruptura depende simultaneamente de E e de Σ_e .

(Nesta faixa de valores, a ruptura é um fenômeno complexo, onde as especificações e fórmulas de dimensionamento surgiram de numerosos testes em laboratório)

A figura a seguir, exemplifica algumas destas fórmulas empíricas. Como uma única expressão não consegue descrever comportamento de vários testes, em toda gama de índices de esbeltez, foram desenvolvidas diversas fórmulas, sendo cada uma delas aplicada para certo intervalo de valores de esbeltez.



As equações foram desenvolvidas para diversos materiais. Em cada caso deve-se verificar se a fórmula escolhida se aplica ao índice de esbeltez da coluna em estudo. Deve-se verificar ainda, se a fórmula fornece diretamente o valor da tensão admissível para a coluna, o se ela fornece o valor da tensão crítica, quando é necessária a aplicação de um coeficiente de segurança adequado.

$$\Sigma_{adm} = \frac{\Sigma_{cr}}{F.S} = P_{adm} = \Sigma_{adm} \cdot A$$

Três tipos de materiais serão avaliados:

- Aço
- Alumínio
- Madeira

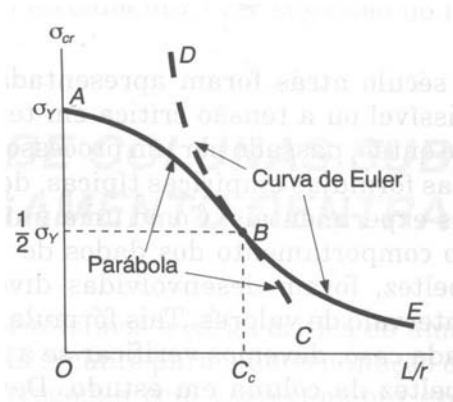
1.7.1 Colunas de Aço Estrutural

O projeto de colunas de aço se baseia nas equações propostas pelo AISC (American Institute of Steel Constructional).

Utiliza-se uma expressão parabólica para Σ_{adm} em colunas curtas e

intermediárias, sendo adotada uma expressão similar à fórmula de Euler para as colunas longas. Estas relações são desenvolvidas em duas etapas:

Obtém-se inicialmente uma curva representativa da variação de Σ_{cr} com L/r .



Essa curva não incorpora nenhum coeficiente de segurança. A parte **AB** da curva é uma parábola da forma:

$$\Sigma_{cr} = \Sigma_0 - \left(\frac{L}{r}\right)^2,$$

enquanto que o trecho BE é obtido pela equação de Euler, $\Sigma_{cr} = \frac{^2.E}{\left(\frac{L}{r}\right)^2}$

- Para $\Sigma_{cr} = \Sigma_y \rightarrow L/r = 0$ de modo que $\Sigma_0 = \Sigma_y$ na equação do trecho **AB**.
- De acordo com o AISC, o ponto **B**, ponto de tangência entre a parábola e a curva de Euler, ocorre para a tensão crítica com valor igual à metade de Σ_y .
- Denota-se C_c o valor de (L/r) neste ponto,

$$\Sigma_{cr} = \Sigma_0 - \left(\frac{L}{r}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\Sigma_y = \Sigma_y - \cdot (C_c)^2$$

$$= \left(\Sigma_y - \frac{1}{2}\Sigma_y\right) \cdot \frac{1}{(C_c)^2} \Rightarrow = \frac{\Sigma_y}{2(C_c)^2}$$

- Substituindo-se na equação de Σ_{cr} , tem-se,

$$\Sigma_{cr} = \Sigma_y - \frac{\Sigma_y}{2(C_c)^2} \cdot \left(\frac{L}{r}\right)^2$$

$$L/r < C_c \Rightarrow \Sigma_{cr} = \Sigma_y \left[1 - \frac{\left(\frac{L}{r}\right)^2}{2(C_c)^2} \right]$$

$$L/r \geq C_c \Rightarrow \Sigma_{cr} = \frac{{}^2.E}{\left(\frac{L}{r}\right)^2} \left\{ \Sigma_{cr} = \frac{1}{2} \Sigma_y \text{ e } L/r = C_c \right.$$

$$\frac{1}{2} \Sigma_y = \frac{{}^2.E}{(C_c)^2} \Rightarrow (C_c)^2 = \frac{2 \cdot {}^2.E}{\Sigma_y}$$

2) Deve-se introduzir um coeficiente de segurança para obtenção das fórmulas finais de dimensionamento do AISC que definem Σ_{adm} como função de L/r .

- Para $L/r \geq C_c \Rightarrow F.S = 23/12 \approx 1,92$

$$\Sigma_{adm} = \frac{\Sigma_{cr}}{F.S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma_{adm} = \frac{{}^2.E}{1,92 \left(\frac{L}{r}\right)^2}$$

- Para $L/r \leq C_c \Rightarrow F.S = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \frac{\left(\frac{L}{r}\right)}{C_c} - \frac{1}{8} \left(\frac{L}{r}\right)^2 \frac{1}{C_c^2}$

Aplicando-se este coeficiente de segurança ao valor de Σ_{cr} , obtém-se,

$$L/r < C_c < 200 \Rightarrow \Sigma_{adm} = \frac{\Sigma_{cr}}{F.S} \Rightarrow$$

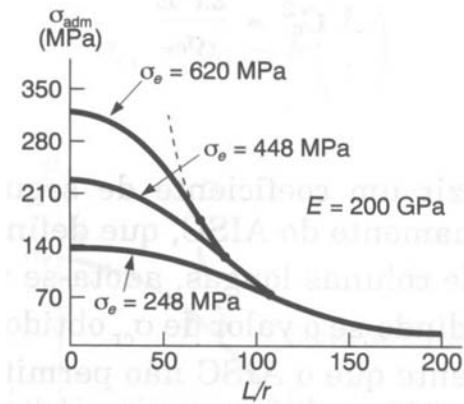
$$\Rightarrow \Sigma_{adm} = \frac{\Sigma_y}{F.S} \left[1 - \frac{\left(\frac{L}{r}\right)^2}{2 \cdot (C_c)^2} \right]$$

As fórmulas acima podem ser usadas com unidades no sistema internacional ou no sistema inglês.

Através das equações anteriores, Σ_{adm} (aço específico) para um dado valor de L/r .

- Calcula-se C_c para saber qual equação usar

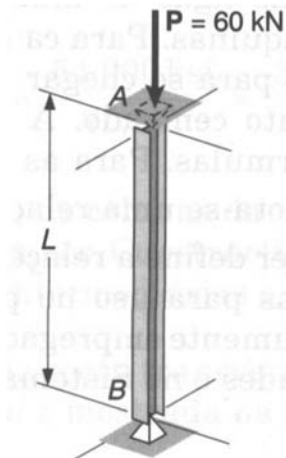
Por conveniência, o AISC fornece diversas tabelas como valores de Σ_{adm} para várias qualidades de aço com $1 < L/r < 200$.



Exemplo 1.8

Calcular o maior comprimento sem travamento que pode ser usado para o perfil S100x115, para que este suporte a força centrada indicada com segurança.

Dados: $E = 200 \text{ GPa}$; $\Sigma_y = 290 \text{ MPa}$.



• Solução

Para que a carga de 60 kN seja suportada com segurança,

$$\Sigma_{adm} = \frac{P}{A} = \frac{60 \cdot 10^3 \text{ N}}{1.452 \text{ mm}} = 41,3 \text{ MPa}$$

Para a tensão de escoamento dada

$$(C_c)^2 = \frac{2 \cdot E}{\Sigma_y} = \frac{2 \cdot 200 \cdot 10^3}{290} \Rightarrow C_c = 116,7$$

Adotando-se $L/r \geq C_c$,

$$\Sigma_{adm} = \frac{E}{\left(\frac{L}{r}\right)^2} \cdot \frac{1}{1,92} = \frac{200 \cdot 10^3}{\left(\frac{L}{r}\right)^2} \cdot \frac{1}{1,92} \Rightarrow \Sigma_{adm} = \frac{1028 \cdot 10^3}{\left(\frac{L}{r}\right)^2} \text{ MPa}$$

Igualando-se essa expressão ao valor necessário da tensão admissível, tem-se,

$$\frac{1028 \cdot 10^3}{\left(\frac{L}{r}\right)^2} = 41,3 \Rightarrow \frac{L}{r} = 157,8 > C_c \text{ (OK!)}, \text{ ou seja, a hipótese adotada estava correta.}$$

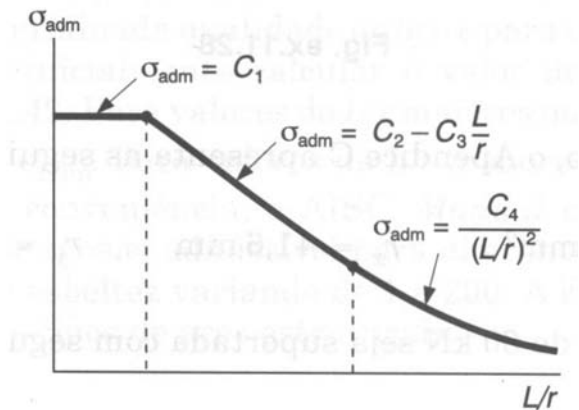
Para o menor valor de C_c ,

$$\frac{L}{r} = 157,8 \Rightarrow L = 157,8 \cdot 14,75 = 2327 \text{ mm} \quad \boxed{L = 25,33 \text{ m}}$$

1.7.2 Colunas em Liga de Alumínio

A *Aluminum Association* fornece três fórmulas pra se chegar ao valor de Σ_{adm} de colunas com carregamento centrado.

- Colunas intermediárias: (relação linear entre Σ_{adm} e L/r)
- Colunas curtas (constante)
- Colunas longas (fórmula de Euler)



a) Liga de alumínio 6061-T6

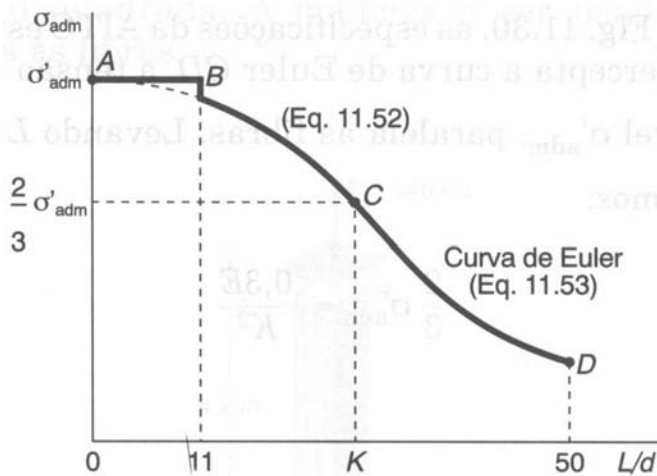
$$\left\{ \begin{array}{l} L/r \leq 9,5 \Rightarrow \Sigma_{adm} = 131 \text{ MPa} \\ 9,5 < L/r < 66 \Rightarrow \Sigma_{adm} = [139 - 0,868 (L/r)] \text{ (MPa)} \\ L/r \geq 66 \Rightarrow \Sigma_{adm} = \frac{351 \cdot 10^3}{(L/r)^2} \text{ (MPa)} \end{array} \right.$$

b) Liga de alumínio 2014-T6 (ALCLAD)

$$\left\{ \begin{array}{l} L/r \leq 12 \Rightarrow \Sigma_{adm} = 193 \text{ MPa} \\ 12 < L/r < 55 \Rightarrow \Sigma_{adm} = [212 - 1,585 \cdot (L/r)] \text{ (MPa)} \\ L/r \geq 55 \Rightarrow \Sigma_{adm} = \frac{372 \cdot 10^3}{(L/r)^2} \text{ (MPa)} \end{array} \right.$$

1.7.3 Colunas em Madeira

Para o projeto de colunas de madeira sob ação de cargas centradas, o American Institute of Timber Construction especifica fórmulas de tensão admissível para colunas curtas, intermediárias e longas.



Para uma coluna com seção transversal retangular de lados **b** e **d** (**d < b**), a variação Σ_{adm} com L/d é mostrada a seguir,

- Colunas curtas

$$\Sigma_{adm} = \Sigma'_{adm} \text{ (tensão admissível à compressão paralela às fibras)}$$

- Descontinuidade em $L/d = 11$

(ponto **b** → limite entre colunas curtas e intermediárias)

- Colunas Intermediárias

$$\Sigma_{adm} = \Sigma'_{adm} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{L/d}{k} \right)^4 \right]$$

onde $K = L/d$ no ponto C

- Colunas Longas

(fórmula de Euler com F.S = 2,74)

$$r_{\square} = \frac{d}{\sqrt{12}}$$

$$\Sigma_{adm} = \frac{{}^2.E}{2,74\left(\frac{L}{r}\right)^2} = \frac{{}^2.E}{2,74\left(\frac{L\sqrt{12}}{d}\right)^2} \Rightarrow \Sigma_{adm} = \frac{{}^2.E}{2,74\left(\frac{12L^2}{d^2}\right)^2}$$

$$\Sigma_{adm} = \frac{0,3.E}{(L/d)^2}$$

(As colunas em que $L/d > 50$ não são permitidas pela AITC).

Pela figura, no ponto C,

$$\Sigma_{adm} = \frac{2}{3}\Sigma'_{adm} \text{ e } K = L/d$$

Na equação de colunas longas,

$$\frac{2}{3}\Sigma'_{adm} = \frac{0,3E}{k^2} \Rightarrow k^2 = \frac{0,3.E.3}{2.\Sigma'_{adm}} \Rightarrow$$

$$k = 0,671\sqrt{\frac{E}{\Sigma'_{adm}}}$$

Nota: Anteriormente, consideraram-se colunas com seção retangular. Para uma seção transversal arbitrária,

$$0 < L/r < 38 \text{ e } \Sigma_{adm} = \Sigma'_{adm}$$

$$38 < L/r < k' \quad \Sigma = \Sigma'_{adm} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{L/r}{k'} \right)^4 \right]$$

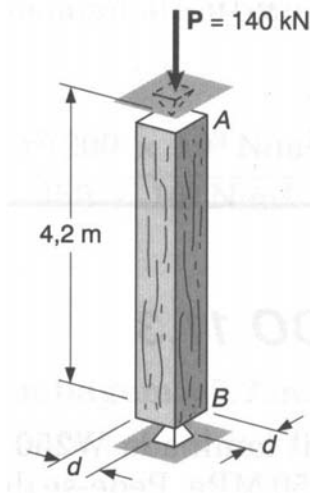
$$k' < L/r < 173 \quad \Sigma_{adm} = \frac{{}^2.E}{2,74\left(\frac{L}{r}\right)^2}$$

$$\text{onde } k' = 2,324\sqrt{\frac{E}{\Sigma'_{adm}}}$$

Exemplo 1.9

Sabendo-se que o comprimento efetivo de flambagem da coluna **AB** é de 4,2m e que deve suportar uma carga de 140 KN, projetar a coluna usando uma seção transversal quadrada. A madeira a ser usada tem $E = 12,4 \text{ GPa}$ e $\Sigma'_{adm} = 9,3 \text{ MPa}$ paralela às fibras.

- Inicialmente, calcula-se K em função de E e Σ'_{adm} .



$$k = 0,671 \sqrt{\frac{E}{\Sigma'_{adm}}} = 0,671 \sqrt{\frac{12,4 \cdot 10^3}{9,3}}$$

$$k = 24,5$$

- Como d não é conhecido, assume-se $L/d > k$.

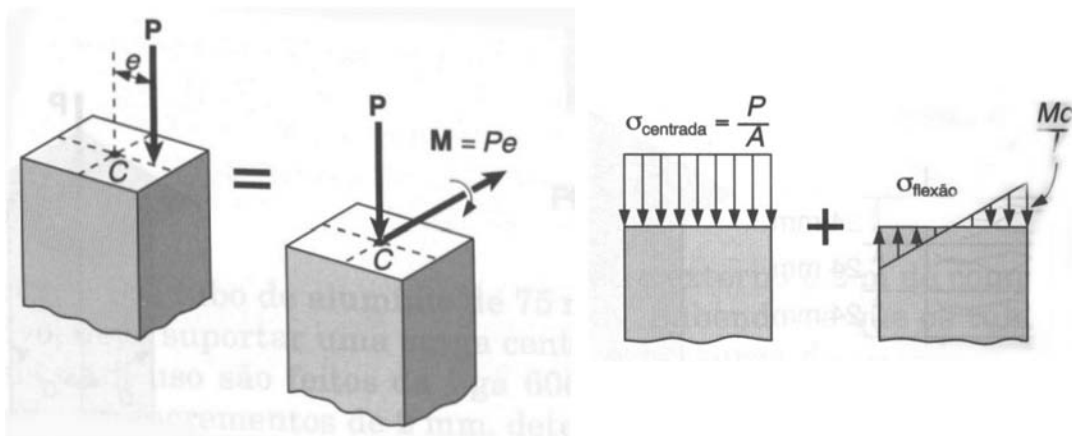
$$\Sigma_{adm} = \frac{P}{A} = \frac{0,3 \cdot E}{\left(\frac{L}{d}\right)^2} \Rightarrow \frac{140 \cdot 10^3}{d^2} = \frac{0,3(12,4 \cdot 10^3)}{(4,2 \cdot 10^3/d)^2}$$

$$d^4 = 663,9 \cdot 10^6 \Rightarrow \boxed{d = 160 \text{ mm}}$$

1.8 Projetos de Colunas Submetidas a Carregamento Excêntrico

Para o projeto de colunas submetidas a uma carga excêntrica, basta utilizar a formulação apresentada na seção anterior, para o caso de carga centrada, com algumas modificações que serão apresentadas a seguir.

Sabe-se que uma carga axial excêntrica P aplicada em um plano de simetria de uma coluna pode se substituída por uma força centrada P e por um conjugado (binário) M de momento $M = P \cdot e$.



As tensões normais que agem em uma seção transversal da coluna podem ser obtidas por superposição dos efeitos P , e ao conjugado M , respectivamente. Essa

superposição pode ser feita desde que a seção transversal em estudo não esteja muito próxima de uma das extremidades da coluna, e desde que as tensões encontradas não excedam o limite de proporcionalidade do material. Desse modo, as tensões normais devido a uma força P excêntrica podem ser calculadas por:

$$\Sigma = \Sigma_{centrada} + \Sigma_{flexão} \Rightarrow \Sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M.c}{I}$$

Sabe-se que em uma coluna projetada corretamente, a tensão máxima definida pela equação acima não deve exceder a tensão admissível da coluna. Duas formas de solucionar este problema são propostas: **Método da Tensão Admissível** e o **Método da Interação**.

1.8.1 Método da Tensão Admissível

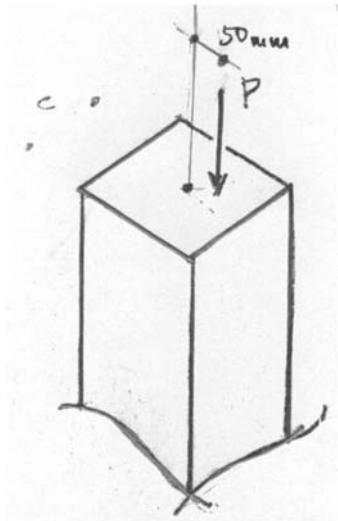
Baseia-se na hipótese de a tensão é a mesma que para uma coluna com carga centrada. Desse modo, deve-se ter $\Sigma_{max} \leq \Sigma_{adm}$, sendo Σ_{adm} a tensão admissível sob a carga centrada. Logo,

$$\frac{P}{A} + \frac{M.c}{I} \leq \Sigma_{adm}$$

A tensão é obtida pelas fórmulas de projeto de colunas com carregamento centrado apresentadas anteriormente. A maior parte das normas de engenharia especifica que a tensão admissível seja determinada para o maior valor do índice de esbeltez, não importando se esse valor corresponde realmente ao plano em que ocorre a flexão. Em alguns casos, essa especificação pode levar a dimensionamentos realmente exagerados.

Exemplo 1.10

Uma coluna de seção transversal quadrada de lado igual a 125 mm e comprimento de 3,0 m é feita de pinho ($E = 12$ GPa e $\Sigma_{adm} = 10$ MPa para compressão paralela às fibras). Determinar a máxima carga P que a coluna pode suportar com segurança, aplicada com excentricidade $e = 50$ mm.



• **Solução**

Material madeira, seção quadrada

$$k = 0,671 \sqrt{\frac{E}{\Sigma'_{adm}}} = 0,671 \sqrt{\frac{12 \cdot 10^3}{10}} \Rightarrow k = 23,2$$

$$\frac{L}{d} = \frac{3000}{0,125} \Rightarrow \frac{L}{d} = 24$$

$$\text{como } L/d > K \Rightarrow \Sigma_{adm} = \frac{0,3 \cdot E}{\left(\frac{L}{d}\right)^2} = \frac{0,3 \cdot 12 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2}{\left(\frac{3000}{125}\right)^2}$$

$$\Sigma_{adm} = 6,25 \text{ MPa} < 10 \text{ MPa (OK!)}$$

$$\frac{P}{A} + \frac{M \cdot c}{I} \leq 6,25 \text{ MPa}$$

$$A = 125 \cdot 125 = 15625 \text{ mm}^2$$

$$I = \frac{125 \cdot 125^3}{12} = 20.345.052,1 \text{ mm}^4$$

$$c = 62,5 \text{ mm}$$

$$M = P \cdot e = (50 \text{ mm}) \cdot P$$

Substituindo-se na equação, tem-se,

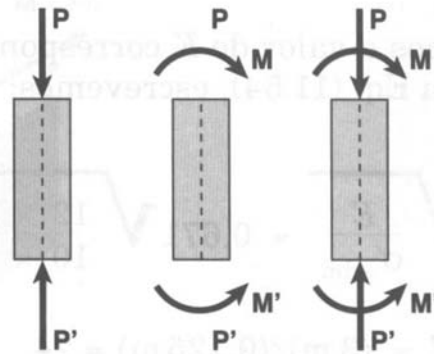
$$\frac{P}{15625} + \frac{P \cdot (50) \cdot (62,5)}{20.345.052,1} \leq 6,25$$

$$6,4 \cdot 10^{-5} P + 15,36 \cdot 10^{-5} P \leq 6,25$$

$$P \leq 28.722,4 \text{ N} \Rightarrow \boxed{P \leq 28,7 \text{ kN}}$$

1.8.2 Método da Interação

A tensão admissível para uma coluna submetida a uma carga centrada é usualmente menor que a tensão admissível para uma coluna em flexão pura, uma vez que aquela leva em conta a probabilidade de flambagem. Desse modo, quando se usa a tensão admissível para o projeto de uma coluna com carga excêntrica e se escreve que a soma das tensões devido à carga centrada P e ao momento fletor M não deve exceder ao valor da tensão admissível para uma coluna de carga centrada, o resultado pode levar a dimensionamentos exagerados.



Pode-se desenvolver um método mais aperfeiçoado de dimensionamento, reescrevendo a equação do item anterior da seguinte forma,

$$\frac{P/A}{\Sigma_{adm}} + \frac{M.c/I}{\Sigma_{adm}} \leq 1$$

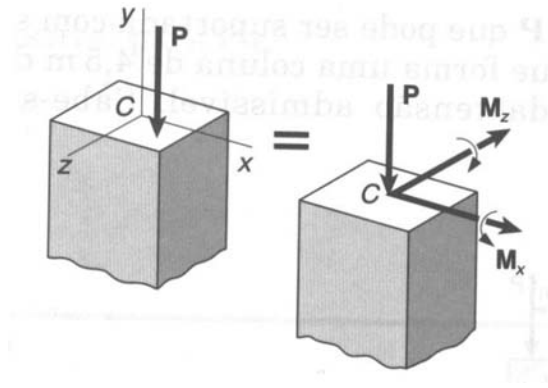
Substituindo Σ_{adm} pelos valores das tensões admissíveis que correspondem, respectivamente, à carga centrada e à flexão pura, tem-se,

$$\frac{P/A}{(\Sigma_{adm})_{centrada}} + \frac{M.c/I}{(\Sigma_{adm})_{flexão}} \leq 1 \text{ (fórmula da interação)}$$

- $M = 0 \Rightarrow$ Dimensionamento da coluna com carga centrada.
- $P = 0 \Rightarrow$ Dimensionamento de viga sujeita à flexão pura.
- P e $M \neq 0 \Rightarrow$ Dimensionamento que considera a capacidade da barra de resistir tanto à flexão pura como carga centrada.

Em qualquer caso, $(\Sigma_{adm})_{centrada}$ será determinada usando-se o maior índice de esbeltez da coluna, independente do plano em que ocorre a flexão.

Quando a carga P não é aplicada em um plano de simetria da coluna, ocorre flexão nos dois planos principais da seção transversal.



$$\frac{P/A}{(\sigma_{adm})_{centrada}} + \frac{|M_x| \cdot z_{max} / I_x}{(\sigma_{adm})_{flexão}} + \frac{|M_z| \cdot x_{max} / I_z}{(\sigma_{adm})_{flexão}} \leq 1$$

Exemplo 1.11

Usar o método da interação para determinar a máxima carga P que pode ser aplicada com segurança à coluna do exemplo 1.10, com excentricidade $e = 50 \text{ mm}$.

• Solução

$$(\sigma_{adm})_{centrada} = 6,25 \text{ MPa}$$

$$(\sigma_{adm})_{flexão} = 10 \text{ MPa (tensão admissível para compressão paralela às fibras)}$$

$$\frac{P/A}{6,25} + \frac{M \cdot c/I}{10} \leq 1$$

$$\frac{P/15.625 \text{ mm}^2}{6,25 \text{ N/mm}^2} + \frac{P \cdot (50 \text{ mm}) \cdot (62,5 \text{ mm}) / 20.345.052,1 \text{ mm}^4}{10 \text{ N/mm}^2} \leq 1$$

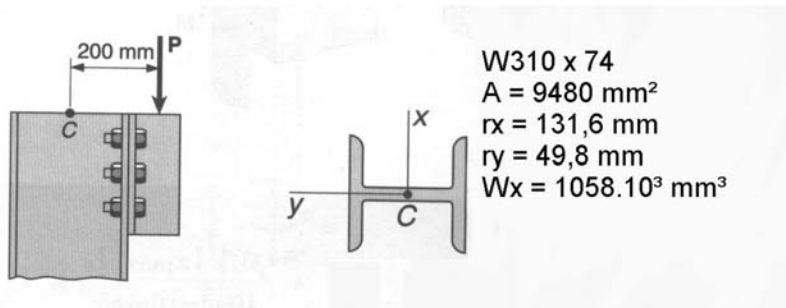
$$0,0000102P + 0,0000154P \leq 1$$

$$P \leq 39.062,5 \text{ N}$$

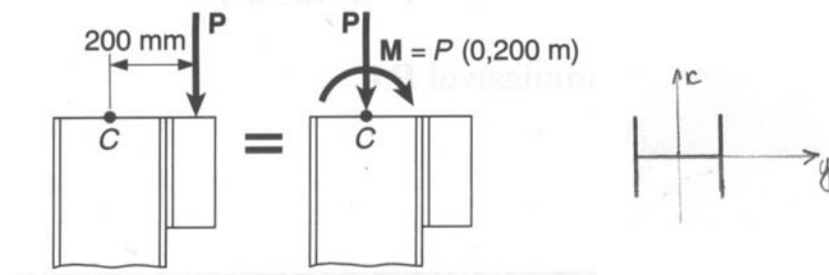
$$P \leq 39,06 \text{ KN}$$

Exemplo 1.12

Determinar a maior carga P que pode ser suportada com segurança por um perfil de aço laminado W310x74, que forma uma coluna de 4,5 m de comprimento de flambagem. Utilizar o método da tensão admissível e depois o método da interação com $(\Sigma_{adm})_{flexão} = 150 \text{ MPa}$.



Dados: $E = 200 \text{ GPa}$ e $\Sigma_y = 250 \text{ MPa}$



• **Solução (a): Método da tensão admissível**

$$\frac{L}{r_x} = \frac{4500}{131,6} = 34,19$$

$$\frac{L}{r_y} = \frac{4500}{49,8} = 90,36 \text{ (utilizar este } \rightarrow \text{ menor } \Sigma_{adm})$$

$$(C_c)^2 = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot E}{\Sigma_y} \Rightarrow (C_c)^2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^6 \cdot 200 \cdot 10^3}{250}} \Rightarrow C_c = 125,66$$

$$\text{como } C_c > L/r_y, \quad F.S. = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \frac{(L/r)}{C_c} - \frac{1}{8} \left(\frac{L/r}{C_c} \right)^3$$

$$F.S = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \left(\frac{90,36}{125,66} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{90,36}{125,66} \right)^3 \Rightarrow F.S = 1,89$$

$$\Sigma_{adm} = \frac{\Sigma_y}{F.S} \left[1 - \frac{(L/r)^2}{2.(C_c)^2} \right] = \frac{250}{1,89} \left[1 - \frac{(90,36)^2}{2.(125,66)^2} \right] \Rightarrow \Sigma_{adm} = 98,08 MPa$$

$$\frac{P}{A} + \frac{M.c}{I} \leq \Sigma_{adm}$$

$$\Sigma_{adm} \Rightarrow \frac{P}{9480} + \frac{P.200}{1058.10^3} \leq 98,08$$

$$P \leq 333015N \Rightarrow P \leq 333,0KN$$

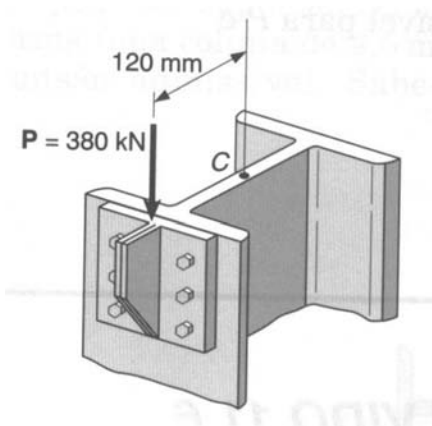
• Solução (b): Método da Interação

$$\frac{P/9480}{98,08} + \frac{P.200/1058.10^3}{150} \leq 1$$

$$P \leq 428,1KN$$

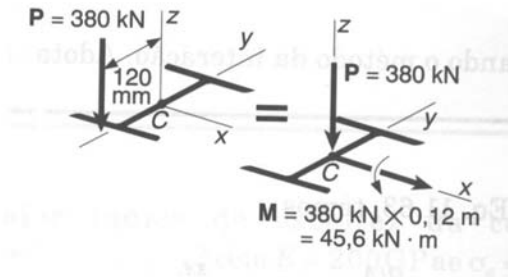
Exemplo 1.13

Uma coluna de aço com comprimento da flambagem de 4,8 m é carregada excentricamente como indica a figura. Usando o método da interação, determinar qual o perfil da abas largas com altura nominal de 200 mm deve ser usado.



	W 200 × 52
	$A = 6650 \text{ mm}^2$
	$r_x = 89,2 \text{ mm}$
	$r_y = 51,6 \text{ mm}$
	$W_x = 514 \times 10^3 \text{ mm}^3$
	$L = 4,8 \text{ m}$

	W 200 × 71
	$A = 9100 \text{ mm}^2$
	$r_x = 91,7 \text{ mm}$
	$r_y = 52,8 \text{ mm}$
	$W_x = 709 \times 10^3 \text{ mm}^3$
	$L = 4.8 \text{ m}$



$E = 200 \text{ GPa}$; $\Sigma_y = 250 \text{ MPa}$ e $(\Sigma_{adm})_{\text{flexão}} = 150 \text{ MPa}$

• Solução

Para a primeira aproximação, utiliza-se o método da tensão admissível com $\Sigma_{adm} = 150 \text{ MPa}$.

$$\Sigma_{adm} = \frac{P}{A} + \frac{M \cdot c}{I} \Rightarrow \frac{P}{A} + \frac{M \cdot c}{A \cdot (r_x)^2} \quad ;$$

$c \approx 100 \text{ mm}$ e $r_x \approx 90 \text{ mm}$

$$150 \text{ N/mm}^2 = \frac{380 \cdot 10^3 \text{ N}}{A} + \frac{45,6 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot 100 \text{ mm}}{A \cdot (90)^2 \text{ mm}^2} \Rightarrow A = 6280 \text{ mm}^2 \rightarrow \mathbf{W200 \times 52}$$

• Verificação W200x52

$$\frac{L}{r_y} = \frac{4800}{51,6} = 93$$

$$C_c = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot 10^3}{250}} \Rightarrow C_c = 125,7$$

$C_c > L/r_y$

$$F.S. = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \frac{\left(\frac{L}{r}\right)}{C_c} - \frac{1}{8} \left(\frac{\left(\frac{L}{r}\right)}{C_c}\right)^3$$

$$F.S. = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{93}{125,7} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{93}{125,7}\right)^3 \Rightarrow F.S. = 1,89$$

$$\Sigma_{adm} = \frac{\Sigma_Y}{F.S} \left[1 - \frac{\left(\frac{L}{r}\right)^2}{2 \cdot (C_c)^2} \right] = \frac{250}{1,89} \left[1 - \frac{93^2}{2 \cdot (125,7)^2} \right] \Rightarrow \Sigma_{adm} = 95,9 MPa$$

$$\frac{P}{A} = \frac{380.10^3 N}{6650 mm^2} = 57,14 MPa$$

$$\frac{M.c}{I} = \frac{M}{W_x} = \frac{45,6.10^3 N}{514.10^3 mm^3} = 88,72 MPa$$

Na equação da interação

$$\frac{57,14}{95,9} + \frac{88,72}{150} = 1,19 \text{ (não serve!)}$$

• Tentativa W200x71

$$\frac{L}{r_y} = \frac{4800}{52,8} = 90,9 < C_c$$

$$F.S = 1,89 \Rightarrow \Sigma_{adm} = 97,69 MPa$$

$$\frac{P}{A} = \frac{380.10^3 N}{9100 mm^2} = 41,76 MPa$$

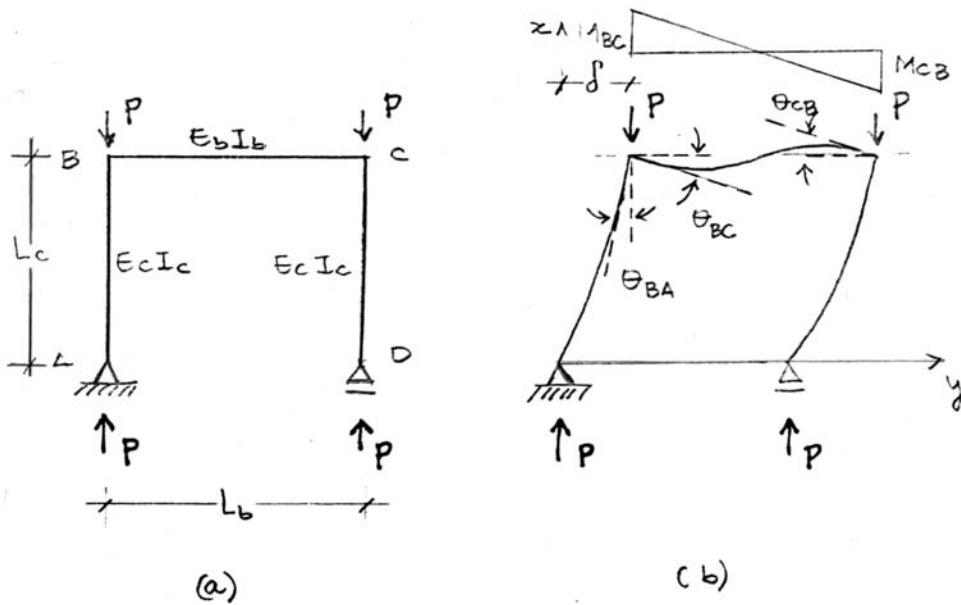
$$\frac{M}{W_x} = \frac{45,6.10^3 N}{709.10^3 mm^3} = 64,32 MPa$$

$$\frac{41,76}{97,69} + \frac{64,32}{150} = 0,86 \quad \rightarrow \quad 0,86 < 1 \text{ (OK!) } \Rightarrow \text{ Satisfatório, porém pode ser}$$

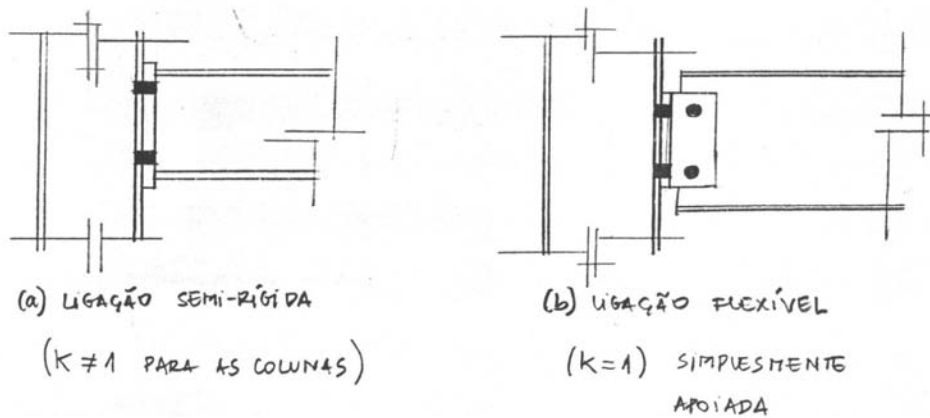
desnecessariamente grande. Logo, Adotar o perfil **W200x71**.

1.9 Comprimentos Efetivos de Colunas em Estruturas Aperticadas

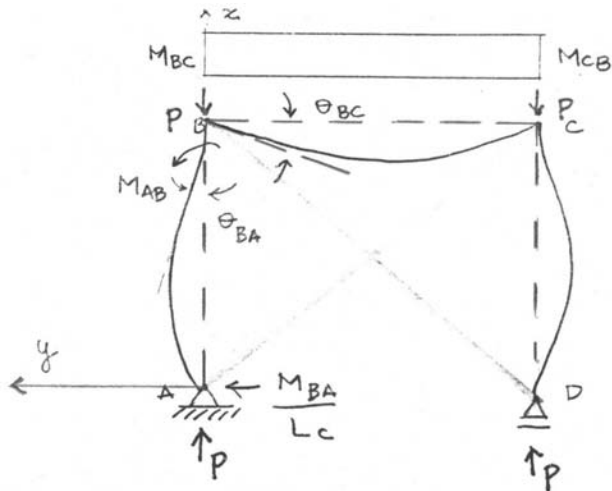
- As colunas raramente ocorrem como um membro isolado;
- As condições de contorno destas colunas são influenciadas pela rigidez dos membros por ela ligados (conectados).



O pórtico da figura (a) assume a configuração deformada da figura (b) quando flamba sob ação da carga P . Esta configuração deformada ocorre porque as ligações em B e C são ligações que possuem resistência à flexão e rigidez suficientes para permitir pequenas alterações no ângulo de 90° inicial nos pontos B e C da estrutura.



- Pórticos cuja resistência lateral (deslocamento) depende basicamente da resistência à flexão de seus membros e ligações são chamados de pórticos **deslocáveis** ou **unbraced frames**.
- Pórticos com contraventamento são chamados de pórticos **indeslocáveis** ou **braced frames**.
- Nem todos os vãos livres de uma estrutura necessitem serem contraventados.



Para o pórtico não contra ventado com ligações resistentes à flexão, tem-se,

$$E_c \cdot I_c = \frac{d^2 y}{dx^2} = -P \cdot y ;$$

$$y^2 = \frac{P}{E_c I_c}$$

• Solução

$$y = A \cdot \text{sen } x + B \cdot \text{cos } x$$

- condição de contorno: $y = 0$ em $x = 0$

$$A \cdot \text{sen } (0) + B \cdot \text{cos } (0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

- deslocamento: $y =$ em $x = L_c$

$$= A \cdot \text{sen } L_c$$

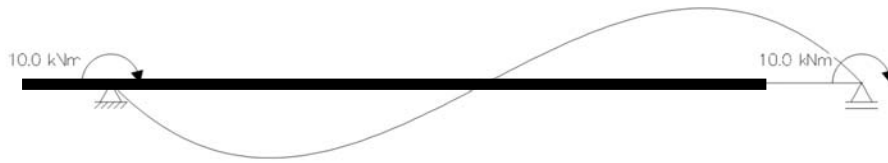
- Momento Fletor $M_{BA} = P$.

$$M_{BA} = P \cdot A \cdot \text{sen } L_c$$

- Momento Fletor M_{BC} com $\theta_{BC} = \theta_{CB}$

$$M_{BC} = \frac{2 \cdot E_b I_b \cdot \theta_{BC}}{L_b} \cdot (2 \theta_{BC} + \theta_{CB}) = \frac{6 \cdot E_b I_b \cdot \theta_{BC}}{L_b}$$

deduzido da seguinte forma:



=



$$\theta_B = \frac{M_0 L}{3EI}$$

$$\theta_C = \frac{M_0 L}{6EI}$$

+



$$\theta_B = \frac{M_0 L}{6EI}$$

$$\theta_C = \frac{M_0 L}{3EI}$$

Logo, θ_B é igual à soma de ambas as rotações, ressaltando-se que uma delas tem sinal contrário.

$$\theta_B = \frac{M_0 L}{3EI} - \frac{M_0 L}{6EI} = \frac{M_0 L}{6EI}$$

Desta forma,

$$M_0 = \frac{6EI}{L} \theta_B \text{ que fornece a equação } M_{BC} = \frac{6E_b I_b}{L_b} \theta_{BC}$$

- Fazendo $M_{BA} = M_{BC}$, tem-se,

$$\frac{6E_b I_b}{L_b} \theta_{BC} = P.A \sin L_C$$

$$\theta_{BC} = \frac{L_b \cdot P.A \sin L_C}{6E_b I_b}$$

- A rotação θ_{BA} da coluna é dada por

$$\theta_{BA} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=L_C} = A \cdot \cos L_C$$

- Igualando-se θ_{BA} e θ_{BC} , tem-se

$$A \cdot \cos L_C = \frac{L_b \cdot P.A \sin L_C}{6E_b I_b}$$

$$\frac{6E_b I_b}{L_b} \cdot \cos L_C = P \cdot \sin L_C$$

$$\text{mas } \cos^2 = \frac{P}{E_c I_c} \Rightarrow P = \cos^2 \cdot E_c I_c$$

$$\frac{6E_b I_b}{L_b} \cdot \cos L_C = \cos^2 \cdot E_c I_c \cdot \sin L_C \quad (\div L_C)$$

$$\frac{6E_b I_b}{L_b} \cdot \frac{1}{L_C} \cdot \cos L_C = \cos^2 \cdot \frac{E_c I_c}{L_C} \cdot \sin L_C$$

$$\frac{6(E_b I_b / L_b)}{(E_c I_c / L_c)} = \cos L_C \cdot \frac{\sin L_C}{\cos L_C}$$

$$\frac{6(E_b I_b / L_b)}{(E_c I_c / L_c)} = \cos L_C \cdot \text{tg } L_C$$

- Viga infinitamente rígida,

$$\operatorname{tg}(L_c) = \infty \text{ desde que } L_c = \frac{\pi}{2} \text{ sendo que } P = \frac{P}{E_c I_c}$$

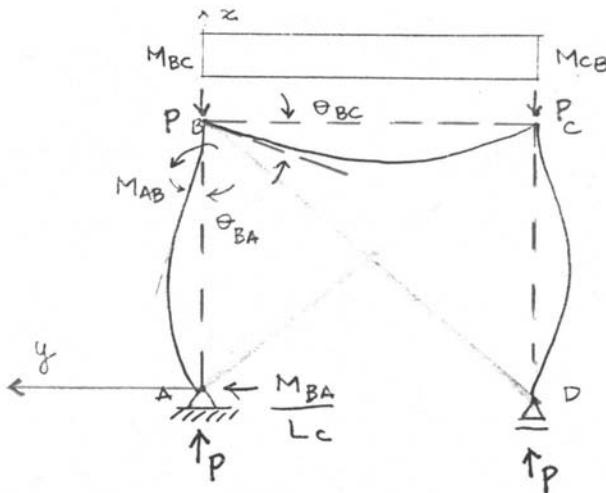
$$\left(\sqrt{\frac{P}{E_c I_c}} \right)^2 L_c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P = \frac{2 E_c I_c}{(2 L_c)^2} ; k = 2$$

- Viga e coluna infinitamente rígidas, $L_c = 3,59$

$$L_c \cdot \operatorname{tg}(L_c) = 6 \text{ desde que } L_c = 1,35$$

$$P = \frac{1,82 E_c I_c}{(L_c)^2} = \frac{2 E_c I_c}{(2,33 L_c)^2} ; k = 2,33$$

Para o pórtico contra ventado apresentado anteriormente,



$$E_c I_c \frac{d^2 y}{dx^2} = -P \cdot y + \frac{M_{BA} \cdot x}{L_c} \text{ cuja solução é dada por}$$

$$y = A \cdot \operatorname{sen} x + B \cdot \operatorname{cos} x + \frac{M_{BA} \cdot x}{P \cdot L_c}$$

Aplicando-se as condições de contorno $y = 0$ em $x = 0$ e $x = L_c$, tem-se,

$$y = \frac{M_{BA}}{P} \left(\frac{x}{L_c} - \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} L_c} \right)$$

- Fazendo $\theta_{BC} = \theta_{BA} = \left(\frac{-dy}{dx} \right)_{x=L_c}$, obtém-se

$$1 - L_c \cdot \cot g L_c = -\frac{(L_c)^2}{2} \cdot \frac{(E_c I_c / L_c)}{E_c I_c / L_b}$$

- Viga infinitamente rígida, $L_c = 4,49$

$$P = 20,2 \cdot \frac{E_c I_c}{(L_c)^2} = \frac{^2 \cdot E_c I_c}{(0,7 L_c)^2} ; K = 0,70$$

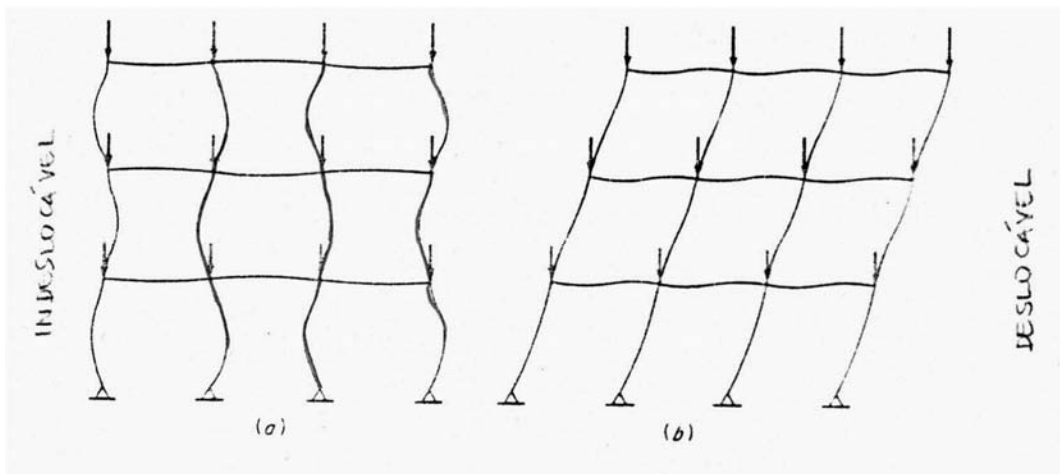
- Viga e coluna infinitamente rígidas, $L_c = 3,59$

$$P = 12,9 \cdot \frac{E_c I_c}{(L_c)^2} = \frac{^2 \cdot E_c I_c}{(0,875 L_c)^2} ; K = 0,875$$

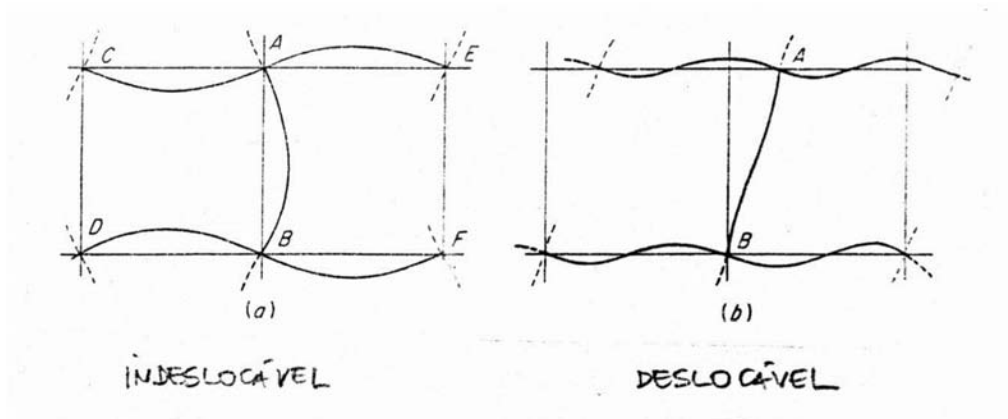
“O comprimento efetivo (coeficiente k) aumenta com a diminuição da rigidez da viga e torna-se unitário quando a rigidez é nula”.

Como simplificado, em estruturas com múltiplos vãos e pavimentos, adota-se o procedimento descrito a seguir;

- 1) O pórtico está sujeito a cargas verticais aplicadas apenas nos nós (ligações);
- 2) Todas as colunas do pórtico tornam-se instáveis simultaneamente;
- 3) Todas as ligações ao nível dos pisos são iguais. Porém, são em sentidos alternados para pórticos indeslocáveis e na mesma direção em pórticos deslocáveis;
- 4) A transferência de momento fletor das vigas para as colunas através das ligações no início da flambagem é proporcional a rigidez das colunas, ou seja, EI/L .



Com as simplificações apresentadas anteriormente, obtém-se uma coluna simples a ser estudada conforme a deslocabilidade do pórtico.



- Estruturas Indeslocáveis

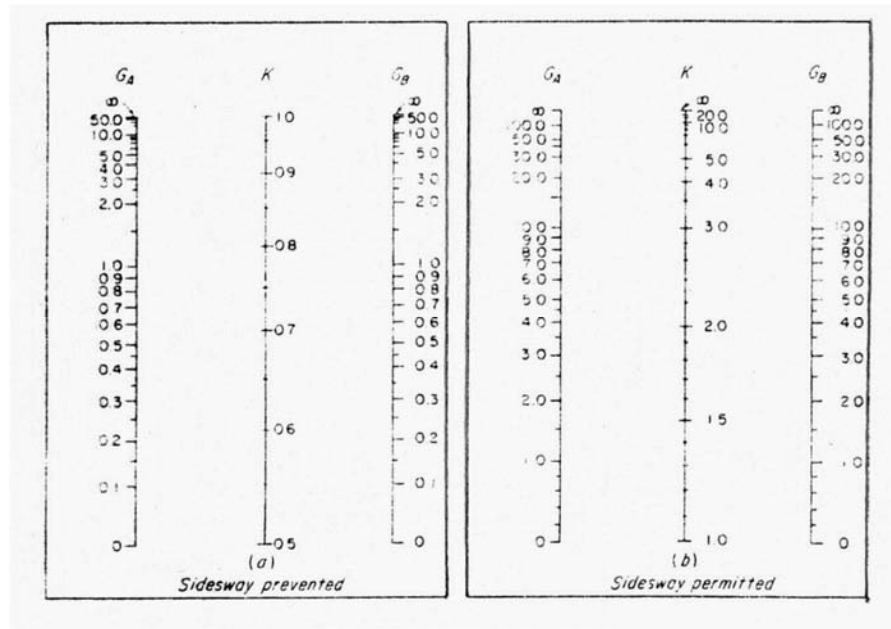
$$\frac{G_A G_B}{4} \left(\frac{2}{k} \right)^2 + \left(\frac{G_A + G_B}{2} \right) \cdot \left(1 - \frac{k}{tg \ /k} \right) + 2 \cdot \left(\frac{tg \ /k}{/k} \right) = 1$$

Estruturas Deslocáveis

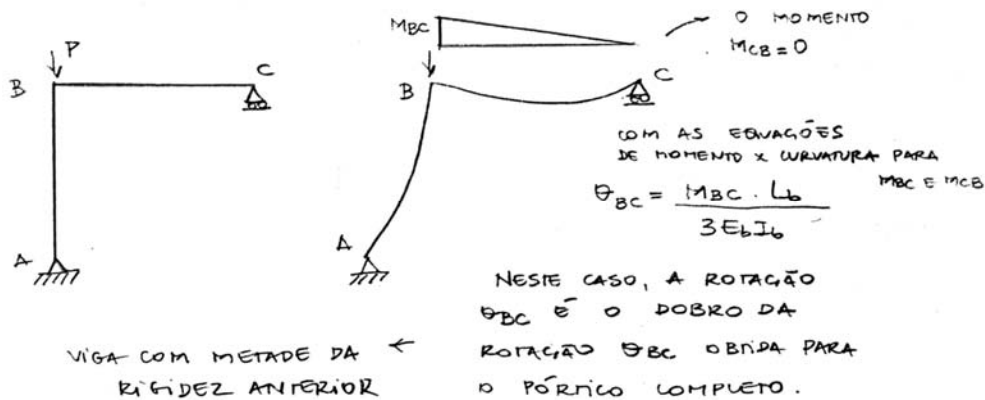
$$\frac{G_A G_B \left(\ /k \right)^2 - 36}{6(G_A + G_B)} = \frac{\ /k}{tg \ /k}$$

$$\text{onde, } G = \frac{\sum (EI/L)_c}{\sum (EI/L)_b}$$

Sendo $(EI/L)_c$ a soma de rigidez das colunas e $(EI/L)_b$ a soma de rigidez das vigas



Obs.. O ábaco foi desenvolvido para colunas pertencentes a pórticos conforme os apresentados no início deste tópico.



Logo, a rigidez relativa para os outros casos pode ser de forma similar. Os fatores de correção que devem multiplicar o I/L da viga para quatro casos distintos são apresentados a seguir.

Condição	(Sidesway)	(No sidesway)
	Deslocável	Indeslocável
Quando a outra extremidade da viga for rotulada	1/2	
Quando a outra extremidade da viga for impedida de girar	2/3	2

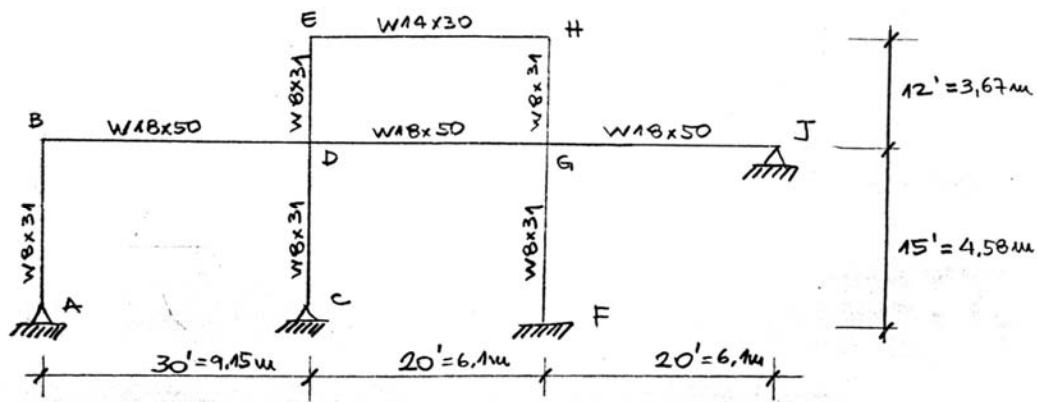
Se a extremidade da coluna é rotulada, o valor de G tende para infinito (rótula \rightarrow rigidez = 0). Por outro lado, se a extremidade é completamente restringida à rotação, G tende a zero.



Valores intermediários de $G = 10$ e $G = 1$ são comumente utilizados em casos práticos de bases de colunas simplesmente apoiadas e fixas, respectivamente.

Exemplo 1.14

Determinar os coeficientes de comprimento efetivo para o pórtico mostrado a seguir. Os valores de I/L são apresentados abaixo (I em mm^4 e L em ft).



AB $110/15 = 7,33$	DE $110/12 = 9,17$
BD $800/30 = 26,7$	GJ $800/20 = 40$
CD $110/15 = 7,33$	FG $110/15 = 7,33$
DG $800/20 = 40$	EH $291/20 = 14,5$
	GH $110/12 = 9,17$

• Solução

a) Coluna AB (indeslocável)

$$G_A = 10, \quad G_B = \frac{7,33}{26,7} = 0,274 \quad ; \quad K = 0,77$$

b) Coluna CD (indeslocável)

$$G_C = 10, \quad G_D = \frac{7,33+9,17}{26,7+40} = 0,247 \quad ; \quad K = 0,76$$

c) Coluna FG (deslocável)

$$G_E = 1, \quad G_G = \frac{7,33+9,17}{40+\frac{3}{2}40} = 0,165, \quad K = 0,67$$

d) Coluna DE (deslocável)

$$G_D = 0,247, \quad G_E = \frac{9,17}{14,5} = 0,630, \quad K = 1,14$$

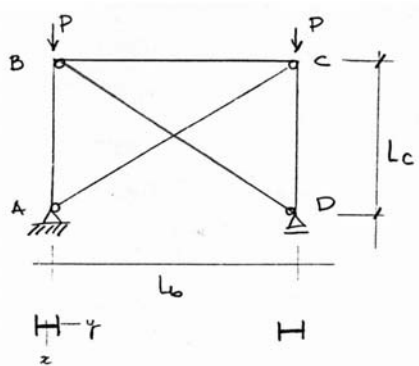
e) Coluna GH (deslocável)

$$G_G = \frac{7,33+9,17}{40+\frac{1}{2}40} = 0,275, \quad$$

$$G_H = \frac{9,17}{14,5} = 0,630, \quad K = 1,15$$

Exemplo 1.15

Determinar a carga crítica P para o pórtico a seguir com contraventamento diagonal e as seguintes dimensões, $L_b = 12,2$ m, $L_c = 6,1$ m, $BC = W610 \times 101$, $AB = DC = W310 \times 23,8$, aço ASTM A36 ($\Sigma_y = 250$ MPa)



• Coluna W310x23,8

$$I_x = 42,9 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$A = 3.040 \text{ mm}^2$$

$$r_x = 118,6 \text{ mm}$$

• **Viga: W610x101**

$$\frac{I_c}{L_c} = \frac{42,9 \cdot 10^6}{6100} = 7.032,8$$

$$\frac{I_c}{L_c} = \frac{762 \cdot 10^6}{12200} = 62.459,0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ga} = 10 \text{ (base simplesmente apoiada)} \\ \text{Gb} = \frac{7032,8}{62459} = 0,11 \end{array} \right\} K = 0,73 \text{ (pórticos indeslocáveis)}$$

$$\frac{L_c}{r_x} = \frac{6100}{118,6} = 51,43$$

$$\frac{k \cdot L_c}{r_x} = 0,73 \cdot 51,43 = 37,54$$

$$(C_c)^2 = \frac{2 \cdot E}{\Sigma_y} \Rightarrow C_c = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot 10^3}{250}} = 125,7 > L/r$$

$$F \cdot S = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{37,54}{125,7} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{37,54}{125,7} \right)^3 \Rightarrow F \cdot S = 1,78$$

$$\Sigma_{adm} = \frac{\Sigma_y}{F \cdot S} \left[1 - \frac{(L/r)^2}{2 \cdot (C_c)^2} \right] = \frac{250}{1,78} \left[1 - \frac{(37,54)^2}{2 \cdot (125,7)^2} \right] \Rightarrow \Sigma_{adm} = 134,2 \text{ MPa}$$

$$P_{cr} = \Sigma_{adm} \cdot A = 134,2 \frac{N}{mm^2} \cdot 3040 mm^2 \Rightarrow P = 408 \text{ KN}$$

• **Supondo pórtico deslocável**

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ga} = 10 \\ \text{Gb} = 0,11 \end{array} \right\} K = 1,7 \quad \therefore \frac{L_c}{r_x} = 51,43 \cdot (1,7) = 87,43$$

$$F \cdot S = 1,89 \Rightarrow \Sigma_{adm} = 100,3 \text{ MPa} \Rightarrow P = 304,8 \text{ KN}$$