

CAPÍTULO 2 Critério de Resistência (Escoamento/Plasticidade e Ruptura)

2.1. Generalidades

Um engenheiro projetista geralmente é confrontado com duas tarefas distintas. A primeira tarefa é analisar o comportamento de projetos propostos submetidos a carregamentos especificados. Para elementos estruturais simples, pode-se usar as equações básicas para calcular tensão e deformação. Para elementos estruturais mais complexos, costuma-se utilizar o Método dos Elementos Finitos (*Figura 1*) para obtenção da distribuição de tensões e deformações. Em alguns casos particulares, as soluções podem ser obtidas pela teoria da elasticidade ou a teoria de placas e cascas. A segunda tarefa do engenheiro é determinar que valores de tensão e/ou deformação levarão à falha do objeto sendo projetado.

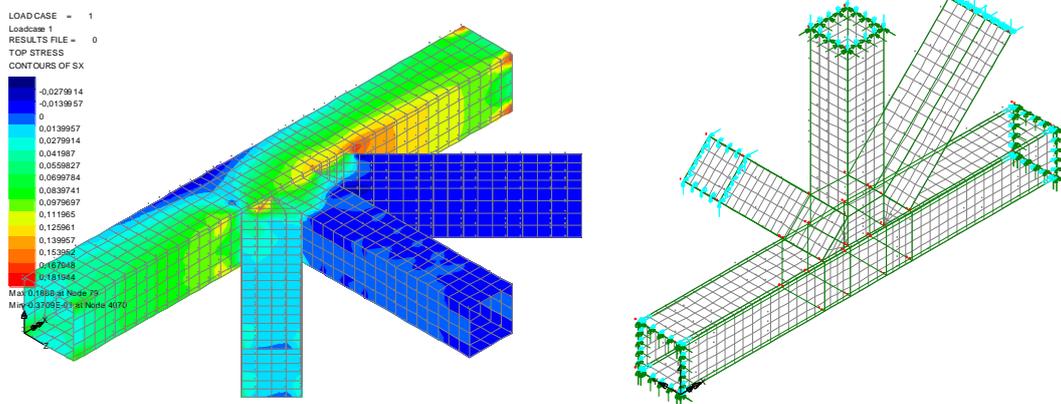


Figura 1 – Análise de um nó soldado de uma treliça - MEF (σ_{eq} Von Mises)

Se um ensaio de tração é realizado em um corpo de prova de um material dúctil, pode-se dizer que o corpo de prova falha quando a tensão axial atinge a tensão de escoamento σ_y , ou seja, o **critério de falha** é o **escoamento**. Se o corpo de prova é feito de um material frágil, o **critério de falha** comum é a **fratura frágil** no limite de resistência à tração, σ_u .

Mas um elemento estrutural está, invariavelmente, submetido a um estado de tensão multiaxial, para o qual é mais difícil se prever que valor de tensão causa a falha do mesmo.

Um ensaio de tração é relativamente fácil de ser feito usando os procedimentos descritos nas normas de ensaios de materiais e os resultados estão disponíveis para diversos materiais. Porém, para se aplicar os resultados de um ensaio de tração (ou de um ensaio de compressão, ou de um ensaio de torção) a um elemento que esteja submetido a um carregamento multiaxial é necessário se considerar o mecanismo real de falha. Ou seja, a falha foi causada porque ...

- a tensão normal máxima atingindo um valor crítico ou;
- a tensão cisalhante máxima atingiu o seu valor crítico ou;
- a energia de deformação ou alguma outra variável atingiu seu valor crítico.

No ensaio de tração, o critério para falha pode ser facilmente enunciado em termos da tensão (trativa) principal σ_1 , mas para a tensão multiaxial devemos considerar a causa real da falha e dizer que combinações de tensão irão acarretar falha do elemento em estudo.

Desta forma, quatro teorias de falha serão consideradas. Duas teorias se aplicam a materiais frágeis (ferro fundido, vidro, porcelana). As outras duas se aplicam a materiais que se comportam de modo dúctil, ou seja, a materiais que atingem o escoamento antes de fraturar (romper). Para a tensão plana, as teorias de falha são expressas em termos das tensões principais, σ_1 e σ_2 . Para o estado triaxial de tensões, σ_1 , σ_2 e σ_3 são usadas.

2.2. Teoria da Tensão Normal Máxima – Teoria de Rankine¹

¹ Homenagem a W. J. Rankine (1820-1872), professor da Universidade de Glasgow, Escócia.

Um material frágil, quando submetido a um teste de tração, falha subitamente por fratura, sem escoamento prévio. A superfície de fratura deste corpo de prova é apresentada na (*Figura 2(a)*) onde nota-se que a fratura frágil resulta diretamente do componente de tensão normal atuante na seção. Já a fratura de um corpo de prova dúctil (aço laminado a quente), (*Figura 2 (b)*) ocorre em um ângulo de 45° com o eixo da amostra (tipo copo – cone) e é devida a componente de tensão cisalhante atuante na superfície. Este item será abordado posteriormente.

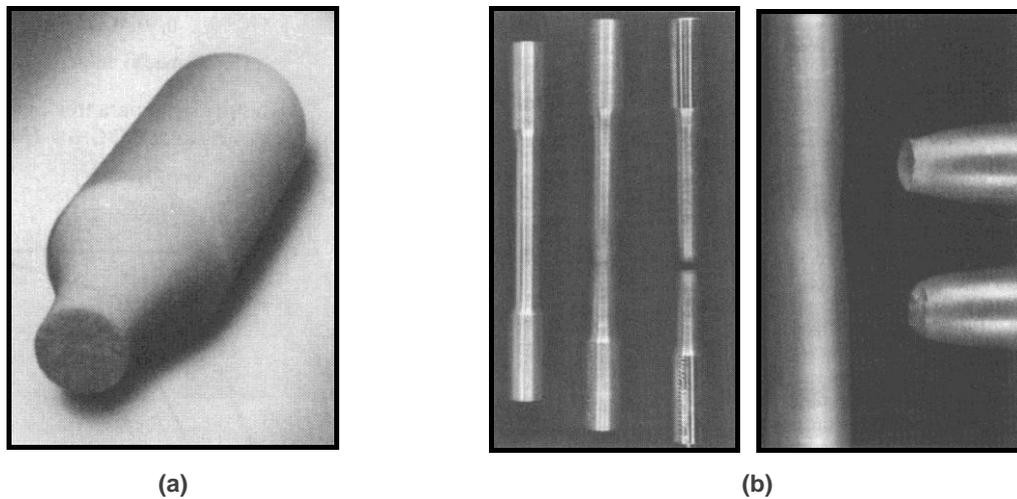


Figura 2 – Superfícies de falha – ensaios de tração

Por outro lado, quando um elemento constituído por um material frágil é submetido a um teste de torção, ocorre falha por fratura, mas em planos de máxima tensão de tração – ver (*Figura 3*). Desta forma, conclui-se que **elementos frágeis são menos resistentes em tração do que em cisalhamento, enquanto elementos dúcteis são menos resistentes em cisalhamento.**

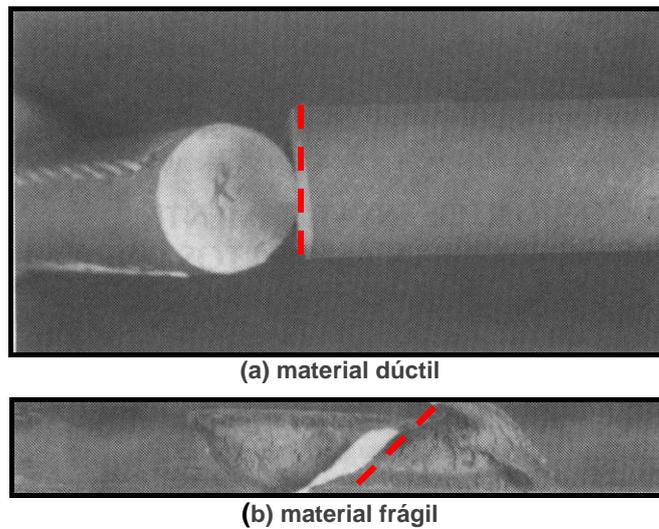


Figura 3 – Superfícies de falha – ensaios de torção

Testes experimentais têm mostrado que o valor da tensão normal no plano de fratura para um estado biaxial de tensões não é significativamente diferente da tensão da fratura σ_u em um teste de tração uniaxial. Portanto, a hipótese da **teoria da tensão normal máxima** considera que um elemento constituído de material frágil falha quando a tensão principal máxima no material atinge a tensão normal máxima que o material pode suportar em um teste de tração uniaxial. Esta teoria também admite que falhas em compressão, ocorrem na mesma tensão máxima que as falhas em tração.

Para o caso de tensão plana, o **critério da tensão normal máxima** é dado pelas equações.

$$\begin{aligned} |\sigma_1| &= \sigma_u \\ |\sigma_2| &= \sigma_u \end{aligned} \quad (2.1)$$

Estas equações podem ser plotadas no plano $\sigma_1 - \sigma_2$ conforme apresentado na (**Figura 4**).

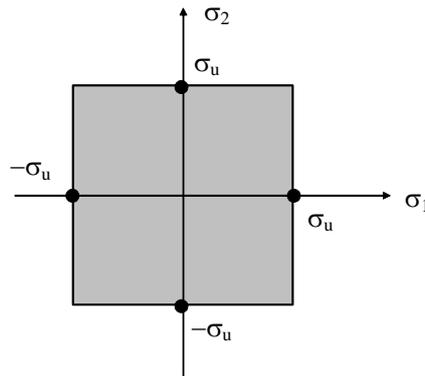


Figura 4 – Diagrama de falha para a teoria da tensão normal máxima (tensão plana)

2.3. Critério de Falha de Mohr²

Se a resistência máxima à compressão de um material frágil não é igual a sua resistência máxima a tração, a teoria da tensão normal máxima não deve ser utilizada. Uma teoria de falha alternativa foi proposta por Otto Mohr e é chamada **critério de falha de Mohr**. A (*Figura 5*) apresenta a curva envolvente das circunferências de Mohr das tensões principais máxima e mínima σ_1 e σ_3 dos estados de tensão que provocam ruptura do material. Para determinação experimental desta curva pode-se, por exemplo, aumentar proporcionalmente as tensões em um determinado estado de tensão até que se verifique a ruptura do material. A circunferência de Mohr definida por σ_1 e σ_3 na ruptura é tangente à envolvente. Repetindo-se o procedimento para diversos estados de tensão, pode-se determinar um número suficiente de circunferências para definir a curva envolvente de Mohr.

² Engenheiro alemão Otto Mohr (1835-1918), inventor do círculo de Mohr

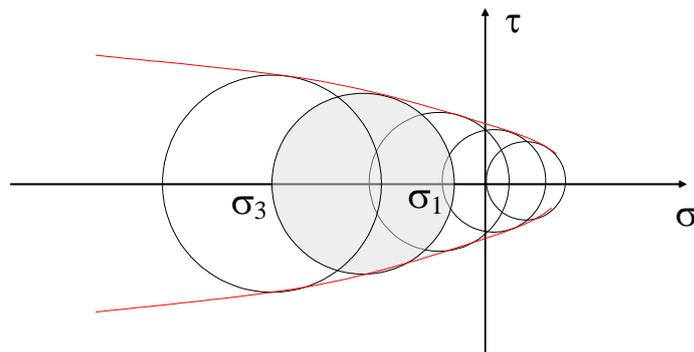


Figura 5 – Envoltória de resistência intrínseca de Mohr

Uma vez traçada a envolvente de Mohr para um determinado material, verifica-se facilmente se um dado estado de tensão provoca ou não a ruptura deste material, traçando-se a circunferência de Mohr das tensões principais máximas e mínimas e verificando se ela intercepta ou não esta curva.

Para simplificar a utilização deste método, Mohr admitiu que a envolvente de todas as circunferências, pode ser aproximada com suficiente precisão através de duas retas, o que possibilita o seu traçado a partir dos resultados de ensaios de tração e compressão uniaxiais do material conforme apresentado na (**Figura 6**).

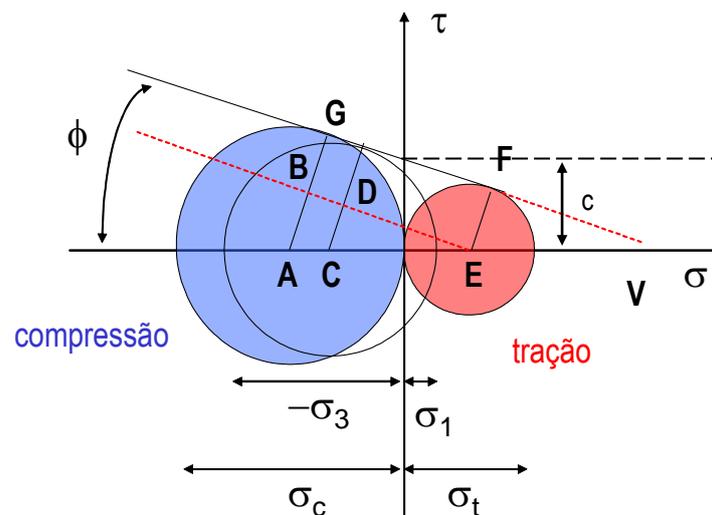


Figura 6 – Critério de Ruptura de Mohr

Na ruptura, o estado de tensão representado pelas tensões extremas σ_1 e σ_3 é tangente à envolvente. Estas tensões podem ser relacionadas com as tensões de ruptura do material em tração e compressão uniaxiais, σ_t e σ_c (nesta análise, considera-se σ_c em valor absoluto). Para isso, consideram-se as relações obtidas através da (*Figura 6*).

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \frac{\sigma_c}{2} - \frac{\sigma_t}{2} \\ \overline{CD} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_t}{2}\end{aligned}\quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}\overline{AE} &= \frac{\sigma_c}{2} + \frac{\sigma_t}{2} \\ \overline{CE} &= \frac{\sigma_t}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\end{aligned}\quad (2.3)$$

Desta figura também se verifica facilmente por semelhança de triângulos, que a circunferência definida pelas tensões principais σ_1 e σ_3 do estado de tensão em estudo não ultrapassam a envolvente de resistência, isto é, o material não rompe, enquanto se verificar a condição

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} > \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} \Rightarrow \frac{\sigma_c - \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t} > \frac{\sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_t}{\sigma_t - \sigma_1 - \sigma_3}\quad (2.4)$$

Se as tensões principais forem todas de tração, o critério de Mohr fornece resultados diferentes dos observados experimentalmente. Isto ocorre porque a envolvente de resistência aproximada por duas retas apresenta o vértice V que não existe na curva real. Nestes casos, deve-se utilizar o critério da tensão normal máxima, ou seja, deve se verificar a condição ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$)

$$\sigma_1 \leq \sigma_t\quad (2.5)$$

Como o material não suporta tensões de tração superiores a σ_t ($\sigma_1 \leq \sigma_t$) e a equação (2.4) somente fornece bons resultados para $\sigma_3 < 0$, a quantidade $\sigma_t - \sigma_1 - \sigma_3$ toma sempre valores positivos. Nestas condições, a equação (2.4) é equivalente à condição.

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_t - \sigma_c} < 1 \quad (2.6)$$

Esta expressão traduz o critério de Mohr para a previsão da ruptura de materiais frágeis.

Em algumas aplicações deste critério, especialmente no campo da Mecânica dos Solos e Rochas, utilizam-se como parâmetros que caracterizam a ruptura o ângulo de atrito ϕ e a coesão c em vez de σ_c e σ_t . O ângulo ϕ traduz o acréscimo de resistência às tensões tangenciais quando atua na faceta em causa uma tensão normal de compressão. A coesão c indica a resistência às tensões tangenciais quando a tensão normal é nula. A expressão do critério de Mohr em função destes parâmetros pode ser deduzida a partir das relações entre os raios $\overline{EF} = \sigma_t / 2$ e $\overline{AG} = \sigma_c / 2$ e os parâmetros ϕ e c .

Da (**Figura 6**), verifica-se facilmente que,

$$\begin{cases} \frac{\sigma_t}{2} + \frac{\sigma_t}{2} \operatorname{sen} \phi = c \cdot \cos \phi \Rightarrow \sigma_t = \frac{2c \cdot \cos \phi}{1 + \operatorname{sen} \phi} \\ \frac{\sigma_c}{2} - \frac{\sigma_c}{2} \operatorname{sen} \phi = c \cdot \cos \phi \Rightarrow \sigma_c = \frac{2c \cdot \cos \phi}{1 - \operatorname{sen} \phi} \end{cases} \quad (2.7)$$

Substituindo-se estes valores de σ_t e σ_c na equação (2.6), obtém-se a expressão do critério de Mohr em função de c e ϕ . Assim, segundo este critério, o material não rompe enquanto se verificar a condição

$$\sigma_1(1 + \operatorname{sen} \phi) - \sigma_3(1 - \operatorname{sen} \phi) < 2c \cdot \cos \phi \quad (2.8)$$

Na (**Figura 7**) representa-se este critério no plano das tensões principais σ_1 e σ_2 com $\sigma_3 = 0$ (caso bi-dimensional). O critério de Mohr se reduz ao critério de Rankine quando $\sigma_c = \sigma_t$.

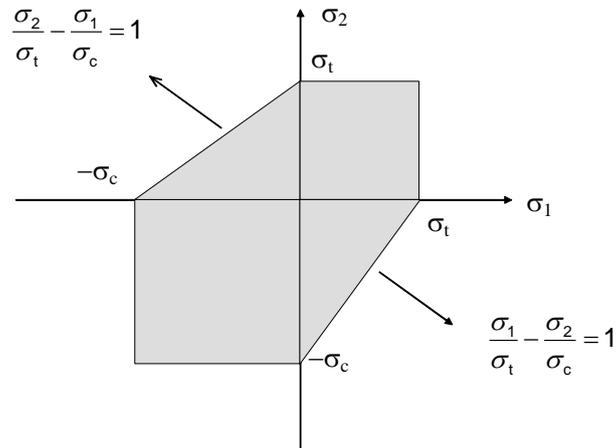


Figura 7 – Critério de Mohr – caso bidimensional

No espaço das tensões principais σ_1 , σ_2 e σ_3 , o critério de Mohr é representado pela pirâmide de base hexagonal irregular, (**Figura 8**), cujas faces laterais são definidas pelos planos descritos pelas equações a seguir

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_t - \sigma_c} = 1 \quad (\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2); \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_t - \sigma_c} = 1 \quad (\sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_1) \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_t - \sigma_c} = 1 \quad (\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3); \quad \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_t - \sigma_c} = 1 \quad (\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1) \quad (2.9) \\ \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_t - \sigma_c} = 1 \quad (\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3); \quad \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_t - \sigma_c} = 1 \quad (\sigma_3 > \sigma_1 > \sigma_2) \end{aligned}$$

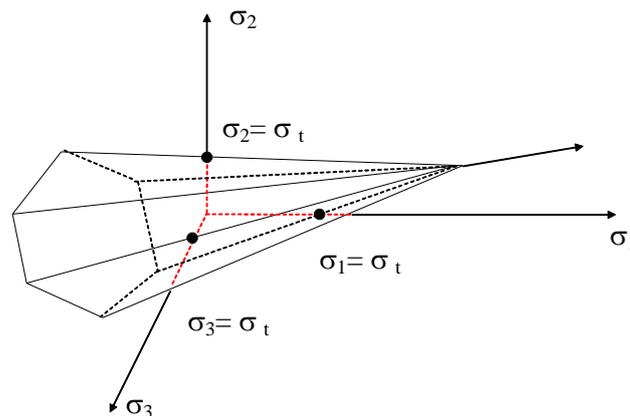


Figura 8 – Critério de Mohr – caso tridimensional

O vértice da pirâmide encontra-se sobre a reta cuja equação é $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, sendo as suas coordenadas dadas pela expressão

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\sigma_t \sigma_c}{\sigma_c - \sigma_t} = \frac{C}{\tan \phi} \quad (2.10)$$

como se verifica facilmente nas equações 2.8 e 2.9 tomando $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$.

2.4. Teoria da Tensão Cisalhante Máxima – Teoria de Tresca

Quando uma chapa de um material dúctil, como aço carbono, é ensaiada à tração, observa-se que o mecanismo que é realmente responsável pelo escoamento é o deslizamento. Ou seja, cisalhamento ao longo dos planos de tensão cisalhante máxima, a 45° em relação ao eixo do elemento. O escoamento inicial está associado ao aparecimento da primeira linha de deslizamento na superfície do corpo de prova e, conforme a deformação aumenta, mais linhas de deslizamento aparecem até que todo o corpo de prova tenha escoado. Se este deslizamento for considerado o mecanismo real de falha, então a tensão que melhor caracteriza esta falha é a tensão cisalhante nos planos de deslizamento. A (**Figura 9**) mostra o círculo de Mohr de tensão para este estado de tensão uniaxial, indicando que a tensão cisalhante nos planos de deslizamento tem um valor de $\sigma_y/2$. Deste modo, se for postulado que em um material dúctil sob qualquer estado de tensão (uniaxial, biaxial ou triaxial) a falha ocorre quando a tensão cisalhante em qualquer plano atinge o

valor de $\sigma_y/2$, então o **critério de falha para a teoria da tensão cisalhante máxima** pode ser enunciado como.

$$\tau_{\text{abs máx}} = \frac{\sigma_y}{2} \quad (2.11)$$

onde σ_y é o limite de escoamento determinado por um ensaio de tração simples.

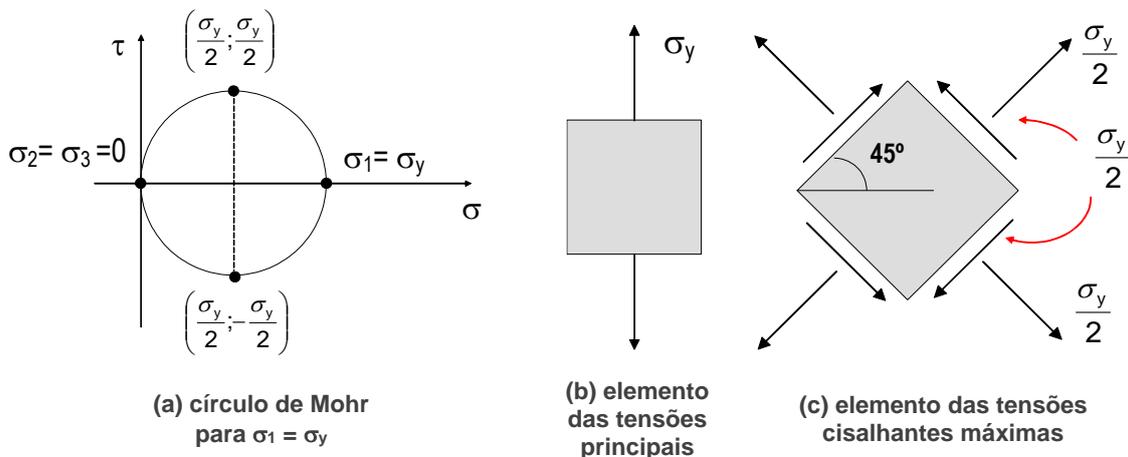


Figura 9 – Tensões principais e tensões cisalhantes máximas – ensaio de tração uniaxial

Sabendo-se que a equação de $\tau_{\text{abs máx}} = \frac{\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}}{2}$, obtém-se,

$$\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}} = \sigma_y \quad (2.12)$$

onde $\sigma_{\text{máx}}$ é a tensão principal máxima e $\sigma_{\text{mín}}$ é a tensão principal mínima.

Para o caso de tensão plana, o **critério de falha da tensão cisalhante máxima** pode ser enunciado em termos das tensões principais que atuam no plano σ_1 e σ_2 como se segue:

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_1| = \sigma_y \text{ se } |\sigma_1| \geq |\sigma_2| \\ |\sigma_2| = \sigma_y \text{ se } |\sigma_2| \geq |\sigma_1| \end{aligned} \right\} \text{ se } \sigma_1 \text{ e } \sigma_2 \text{ têm o mesmo sinal} \quad (2.13)$$

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_y \quad \text{se } \sigma_1 \text{ e } \sigma_2 \text{ têm sinais opostos}$$

As equações acima podem ser representadas graficamente como mostra a (**Figura 10**).

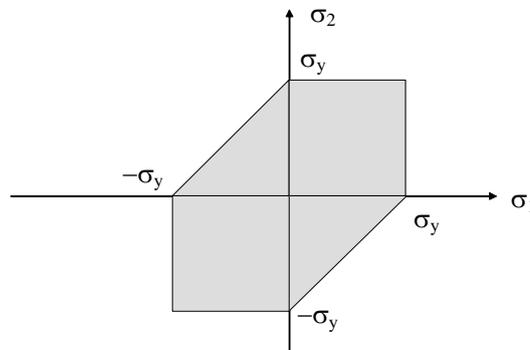


Figura 10 – Hexágono de falha para a teoria da tensão cisalhante máxima (em tensão plana)

Para um elemento sob tensão plana, o estado de tensão em todos os pontos do corpo pode ser representado por um ponto de tensão (σ_1, σ_2) no plano $\sigma_1 - \sigma_2$, como indicado na figura anterior. Se o estado de tensão para qualquer ponto no corpo corresponde a um ponto de tensão que se situe fora do hexágono da figura ou em sua fronteira, diz-se que ocorreu a falha, de acordo com a teoria da tensão cisalhante máxima.

2.5. Teoria da Energia de Distorção Máxima – Teoria de Von Mises

Embora a teoria da tensão cisalhante máxima forneça uma hipótese razoável para o escoamento em materiais dúcteis, a teoria da energia de distorção máxima se correlaciona melhor com os dados experimentais e, deste modo, é geralmente preferida. Nesta teoria, considera-se que o escoamento ocorre quando a energia associada à mudança de forma de um corpo sob carregamento multiaxial for igual à energia de distorção em um corpo de prova de tração, quando o escoamento ocorre na tensão de escoamento uniaxial, σ_y .

Considere a energia de deformação armazenada em um elemento de volume, como mostrado na (**Figura 11**).

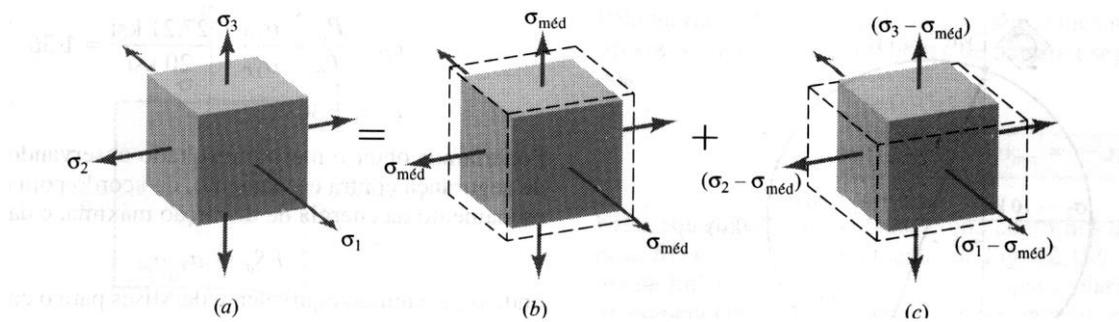


Figura 11 – (a) estado triaxial de tensões (b) variação de volume (c) distorção

A densidade de energia de deformação devida ao carregamento multiaxial é dada pela equação 2.1, que pode ser escrita, usando os três eixos principais, na forma,

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) \quad (2.1)$$

Combinando-se esta equação com a Lei de Hooke, obtém-se,

$$U_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3)] \quad (2.2)$$

Uma parcela desta energia de deformação pode estar associada à variação de volume do elemento e o restante da energia de deformação está associado à variação de forma, ou seja, à distorção. A variação de volume é produzida pela tensão média $\sigma_{\text{média}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$, como ilustrado na (**Figura 11(b)**). As tensões resultantes mostradas na (**Figura 11(c)**) produzem distorção sem qualquer variação no volume.

Ensaio mostraram que materiais não escoam quando estão submetidos a pressões hidrostáticas (tensões iguais em todas as direções – estado de tensão hidrostático – (**Figura 11(b)**) de valores extremamente altos). Assim, postulou-se que as tensões que realmente causam escoamento são as tensões que produzem distorção. Esta hipótese constitui o **critério de escoamento (de falha) da energia de distorção máxima**, que enuncia:

“o escoamento de um material dúctil ocorre quando a energia de distorção por unidade de volume iguala ou excede a energia de distorção por unidade de volume quando o mesmo material escoar em um ensaio de tração simples.”

Quando as tensões da (*Figura 11(c)*), que causam distorção, são substituídas na equação 2.2, obtendo-se a seguinte expressão para a densidade de energia de distorção.

$$U_d = \frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] \quad (2.3)$$

A densidade de energia de distorção em um corpo de prova de tração na tensão limite de escoamento, σ_y , é:

$$(U_d)_y = \frac{1}{6G} \sigma_y^2 \quad (2.4)$$

Pois $\sigma_1 = \sigma_y$ e $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Deste modo, o escoamento ocorre quando a energia de distorção para um carregamento geral, dado pela equação 2.3, iguala ou excede o valor de $(U_d)_y$ na equação 2.4. Assim, o critério de falha da energia de distorção máxima pode ser enunciado em termos das três tensões principais como.

$$\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] = \sigma_y^2 \quad (2.5)$$

Em termos das tensões normais e das tensões cisalhantes em três planos arbitrários mutuamente ortogonais, pode-se mostrar que o critério de falha da energia de distorção máxima tem a seguinte forma.

$$\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)] = \sigma_y^2 \quad (2.6)$$

Para o caso de tensão plana, as expressões correspondentes para o critério de falha da energia de distorção máxima podem ser facilmente obtidas das equações 2.5 e 2.6, colocando-se $\sigma_3 = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Em termos das tensões principais tem-se, então,

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_y^2 \quad (2.7)$$

Esta é a equação de uma elipse no plano $\sigma_1 - \sigma_2$, como mostrado na (*Figura 12*). Com o propósito de comparação, o hexágono de falha para a teoria de escoamento da tensão cisalhante máxima também está mostrado, em linhas tracejadas. Nos seis vértices do hexágono, as duas teorias de falha coincidem, ou seja, ambas as teorias predizem que o escoamento ocorrerá se o estado de tensão (plano) em um ponto corresponde a qualquer um destes seis estados de tensão. Por outro lado, a teoria da tensão cisalhante máxima dá uma estimativa mais conservadora (ou seja, um valor menor) para as tensões necessárias para produzir escoamento, pois o hexágono se situa sobre ou dentro da elipse.

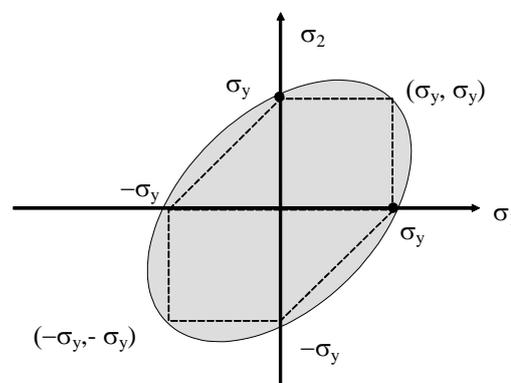


Figura 12 – Elipse de falha para a teoria da energia de distorção máxima (tensão plana)

Um modo conveniente de aplicar a teoria da energia de distorção máxima é tirar a raiz quadrada dos termos do lado esquerdo da equação 2.5 ou 2.6 para obter uma quantidade equivalente de tensão que é chamada de **tensão equivalente de Von Mises**. Qualquer uma das duas equações a seguir pode ser usada para calcular a tensão equivalente de Von Mises, σ_{VM} :

$$\sigma_{VM} = \frac{\sqrt{2}}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

Ou

$$\sigma_{VM} = \frac{\sqrt{2}}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]^{\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

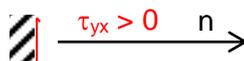
Para o caso de tensão plana, as expressões correspondentes para a tensão equivalente de Von Mises podem ser facilmente obtidas das equações 2.8 e 2.9 colocando-se $\sigma_3 = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

Comparando-se o valor da tensão de Von Mises em qualquer ponto, com o valor da tensão de escoamento em tração, σ_y , pode-se determinar se o escoamento ocorre de acordo com a teoria de falha da energia de distorção máxima. Deste modo, a tensão equivalente de Mises é largamente utilizada quando tensões calculadas são apresentadas em tabelas ou na forma de gráficos coloridos de tensão, como foi feito para os resultados da análise de elementos finitos, mostrada a seguir.

2.6. Revisão – Círculo de Mohr

O círculo de Mohr é construído em um sistema de eixos retilíneos com o eixo horizontal (eixo das abscissas) representando a tensão normal σ e o eixo vertical (eixo das ordenadas) representando a tensão cisalhante τ . **Todo ponto do círculo de Mohr corresponde às tensões σ e τ em um plano particular; para o ponto genérico N, as tensões são (σ_n, τ_n) .** Para enfatizar isto, denominam-se os pontos no círculo de Mohr com a mesma denominação que a face representada por aquele ponto. O plano x está representado pelo ponto X no círculo; o plano n está representado pelo ponto N e assim, sucessivamente. Ao se usar as equações para obtenção de σ_θ e τ_θ , as convenções de sinais para as tensões devem ser cuidadosamente observadas:

- as tensões normais de tração são positivas;
- a tensão de cisalhamento, τ_{yx} , é positiva quando atua no sentido positivo do eixo y;



c) a tensão de cisalhamento, τ_θ , é positiva quando atua no sentido horário.

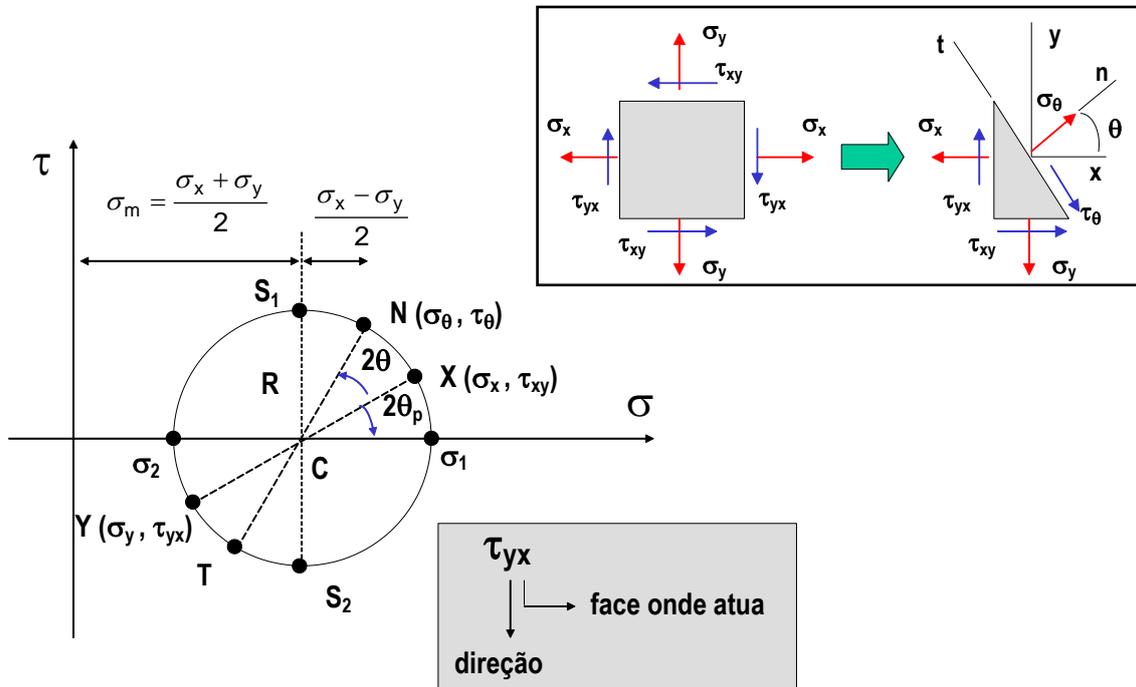


Figura 13 – Círculo de Mohr (estado plano de tensão)

O centro do círculo é obtido pela equação

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \tag{ 2.10 }$$

O raio do círculo é obtido por

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2} \tag{ 2.11 }$$

As tensões normal e cisalhante no plano inclinado são dadas por:

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{yx} \text{sen} 2\theta = \tag{ 2.12 }$$

$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta - \tau_{yx} \cos 2\theta \quad (2.13)$$

E as tensões principais são dadas por

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.14)$$

O ângulo $2\theta_p$ que determina o primeiro plano principal, tem tangente igual a τ_{xy} dividido pela distância horizontal entre os pontos X e C que é igual a

$$\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad (2.15)$$

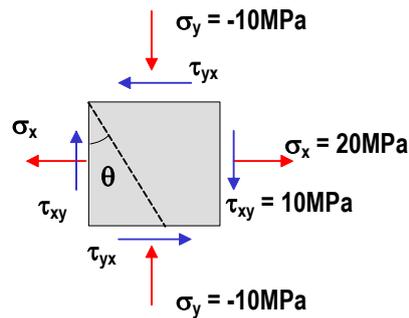
Assim, vê-se que,

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2.16)$$

E finalmente, o segundo plano principal é definido pela mesma equação que dá dois valores para θ_p , diferindo de 180° .

Exemplo 1.1 – Para o estado plano de tensão apresentado a seguir, pede-se:

- Construir o círculo de Mohr;
- Determinar as tensões em todas as faces de um elemento que está girado 30° no sentido anti-horário (trigonométrico) em relação à orientação do elemento de tensão apresentado ao lado;
- Determinar a orientação dos planos principais e as tensões principais;
- Determinar a orientação dos planos da tensão cisalhante máxima e o valor da tensão cisalhante máxima.

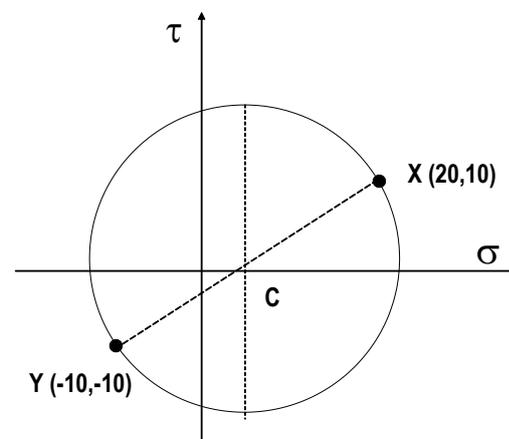


a) Marcar o ponto X em (20MPa; 10MPa) e o ponto Y em (-10MPa; -10MPa). O centro do círculo é obtido pela equação

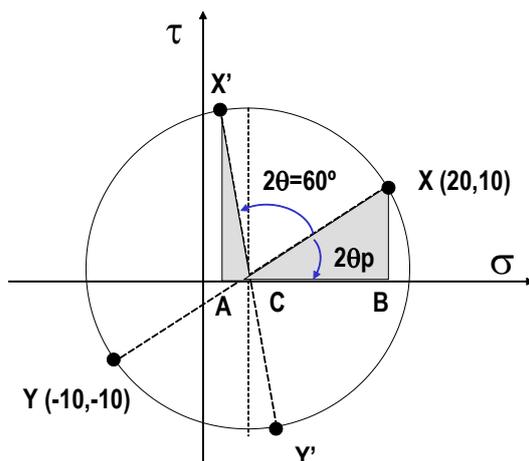
$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{20 + (-10)}{2} = 5 \text{ MPa}$$

e o raio é obtido pela equação

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{20 - (-10)}{2}\right)^2 + 10^2} = 18,03 \text{ MPa}$$



b) Para obter as tensões nas faces com $\theta = 30^\circ$ no sentido anti-horário (trigonométrico), deve-se girar o diâmetro XY de 60° no mesmo sentido.



Através do triângulo ACX', pode-se obter as tensões no plano X'Y'.

Para isso, torna-se necessário conhecer o ângulo $2\theta_p$ que pode ser obtido pelo triângulo BCX.

$$2\theta_p = \arctg\left(\frac{10}{15}\right) = 33,69^\circ$$

Assim sendo, o ângulo X'CA vale $180 - 60^\circ - 2\theta_p = 86,31^\circ$

$$CA = R \cdot \cos(86,31^\circ)$$

$$CA = 18,03 \cdot \cos(86,31^\circ) =$$

$$CA = 1,16 \text{ MPa}$$

Assim sendo, $\sigma_{X'} = 5 - 1,16 = 3,84 \text{ MPa}$ e $\sigma_{Y'} = 5 + 1,16 = 6,16 \text{ MPa}$

A tensão cisalhante máxima pode também ser obtida pelo triângulo ACX', ou seja, $\tau_{X'Y'} = R \cdot \sin(86,31^\circ) = 18,03 \cdot \sin(86,31^\circ) = 17,99 \text{ MPa}$.

Os valores de σ_θ e τ_θ também podem ser obtidos pelas equações a seguir:

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{yx} \operatorname{sen} 2\theta = \text{ e } \tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta - \tau_{yx} \cos 2\theta$$

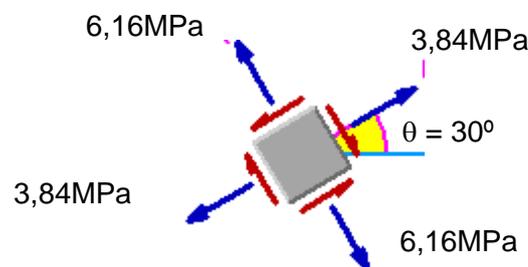
$$\sigma_\theta = \frac{20 + (-10)}{2} + \frac{20 - (-10)}{2} \cos(2 \cdot 30^\circ) - 10 \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot 30^\circ)$$

$$\sigma_\theta = 5 + 15 \cdot \cos(60^\circ) + (10) \cdot \operatorname{sen}(60^\circ) = 5 + 15 \cdot 0,5 - 10 \cdot (0,866) = 3,84 \text{ MPa}$$

$$\tau_\theta = \frac{20 - (-10)}{2} \operatorname{sen}(2 \cdot 30^\circ) - (-10) \cdot \cos(2 \cdot 30^\circ)$$

$$\tau_\theta = 15 \cdot (0,866) + 10 \cdot (0,5) = 17,99 \text{ MPa}$$

Fazendo $2\theta = 240^\circ$, obtém-se $\sigma_{\theta'} = 6,16 \text{ MPa}$



c) orientação dos planos principais e as tensões principais

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

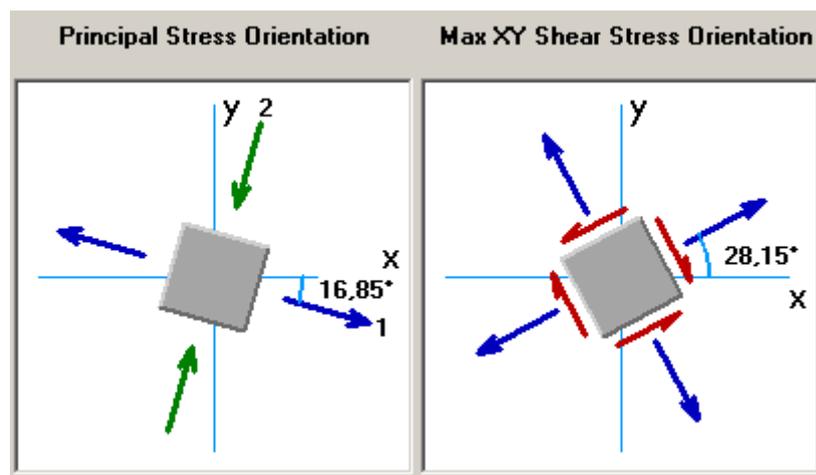
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{20 - 10}{2} + \sqrt{\left(\frac{20 + 10}{2}\right)^2 + (-10)^2} = 23,02 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{20 - 10}{2} + \sqrt{\left(\frac{20 + 10}{2}\right)^2 + (-10)^2} = -13,02 \text{MPa}$$

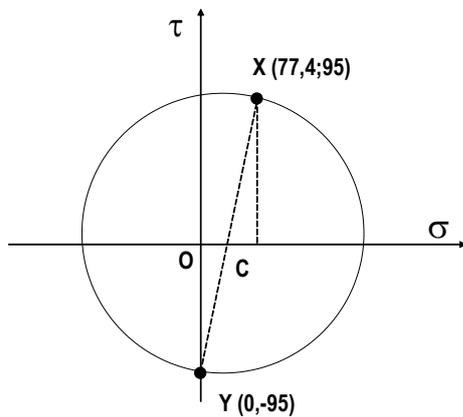
$$\text{tg}2\theta_p = \frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow 2\theta_p = \text{arctg}\left(\frac{2 \cdot (-10)}{20 - (-10)}\right) \Rightarrow \theta_p = -16,85^\circ$$

d) orientação dos planos da tensão cisalhante máxima e o valor da tensão cisalhante máxima

$$\text{cotg}2\theta_s = -\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow 2\theta_s = \text{arctg}\left(-\frac{2 \cdot (-10)}{20 - (-10)}\right) \Rightarrow \theta_s = 28,15^\circ$$



Exemplo 1.2 – O estado de tensão em torno de um ponto é dado por $\sigma_x = 77,4 \text{MPa}$, $\sigma_y = 0$, e $\tau_{yx} = 95,0 \text{MPa}$. Se a tensão de escoamento do material, obtida num ensaio de tração, for $\sigma_e = 200 \text{MPa}$, verificar a segurança ao escoamento em torno deste ponto de acordo com os critérios de Tresca e de Von Mises.



$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{77,4 + 0}{2} + \sqrt{\left(\frac{77,4 - 0}{2}\right)^2 + 95^2}$$

$$\sigma_1 = 141,28 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{77,4 + 0}{2} - \sqrt{\left(\frac{77,4 - 0}{2}\right)^2 + 95^2} = -63,88 \text{ MPa}$$

Critério de Tresca

$$\left. \begin{array}{l} |\sigma_1| = \sigma_y \text{ se } |\sigma_1| \geq |\sigma_2| \\ |\sigma_2| = \sigma_y \text{ se } |\sigma_2| \geq |\sigma_1| \end{array} \right\} \text{ se } \sigma_1 \text{ e } \sigma_2 \text{ têm o mesmo sinal}$$

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_y \quad \text{se } \sigma_1 \text{ e } \sigma_2 \text{ têm sinais opostos}$$

$$|141,28 - (-63,88)| = 205,16 \text{ MPa} > 200 \text{ MPa} \rightarrow \text{falha do material}$$

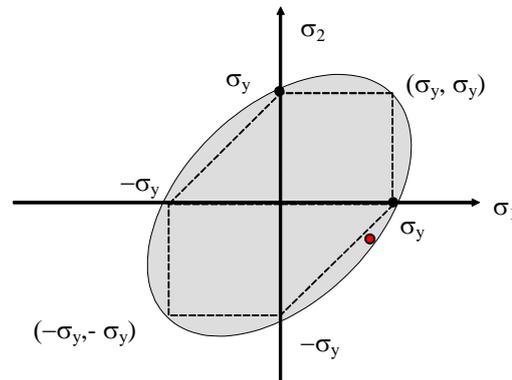
Critério de Von Mises

$$\sigma_{\text{VM}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ mas } \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_{\text{VM}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[(\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) + (\sigma_2)^2 + (\sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\sigma_{\text{VM}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[(\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) + (\sigma_2)^2 + (\sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{(141,28)^2 - (141,28) \cdot (-63,88) + (-63,88)^2} = 181,84 \text{ MPa} < 200 \text{ MPa} \rightarrow \text{OK!!!!}$$



Exemplo 1.3 – O estado de tensão em torno de um ponto no interior de um talude é dado por $\sigma_x = 115,36\text{MPa}$, $\sigma_y = -73,41\text{MPa}$, e $\tau_{yx} = 54,63\text{MPa}$. Verificar a segurança à ruptura em torno deste ponto de acordo com o critério de Mohr, considerando os solos:

- uma argila caracterizada por uma coesão de 500MPa e um ângulo de atrito interno $\phi=21^\circ$;
- uma areia caracterizada por uma coesão 100MPa e um ângulo de atrito interno $\phi=30^\circ$.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2} = \frac{115,36 - 73,41}{2} + \sqrt{\left(\frac{115,36 - (-73,41)}{2}\right)^2 + 54,63^2}$$

$$\sigma_1 = 130,03\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{115,36 - 73,41}{2} - \sqrt{\left(\frac{115,36 - (-73,41)}{2}\right)^2 + 54,63^2} = -88,07\text{MPa}$$

Critério de Ruptura de Mohr

$$\sigma_1(1 + \sin \phi) - \sigma_2(1 - \sin \phi) < 2c \cdot \cos \phi$$

a) argila

$$\sigma_1(1 + \sin \phi) - \sigma_3(1 - \sin \phi) < 2c \cdot \cos \phi$$

$$130,03(1 + \sin 21^\circ) - (-88,07) \cdot (1 - \sin 21^\circ) = 233,13 \text{MPa}$$

$$2c \cdot \cos \phi = 2 \cdot 500 \cdot \cos(21^\circ) = 933,58 \text{MPa}$$

Como $233,13 \text{MPa} < 933,58 \text{MPa} \rightarrow \text{OK!!!!}$

a) areia

$$\sigma_1(1 + \sin \phi) - \sigma_3(1 - \sin \phi) < 2c \cdot \cos \phi$$

$$130,03(1 + \sin 30^\circ) - (-88,07) \cdot (1 - \sin 30^\circ) = 239,07 \text{MPa}$$

$$2c \cdot \cos \phi = 2 \cdot 100 \cdot \cos(30^\circ) = 173,2 \text{MPa}$$

Como $239,07 \text{MPa} > 173,2 \text{MPa} \rightarrow \text{Ruptura do material !!}$