

CAPÍTULO 3 Flexão de Peças Curvas

3.1. Generalidades

No estudo que se segue, admite-se que a linha que une os centros de gravidade das seções transversais da barra, chamada linha dos centros, seja uma curva plana e que as seções transversais tenham um eixo de simetria neste plano.

Algumas hipóteses:

- a) O plano que contém o eixo da barra é também o plano da solicitação;
- b) A seção reta da peça admite pelo menos um eixo de simetria que é coplanar com o eixo da barra.

Esforços solicitantes:

- a) Momento Fletor;
- b) Força Normal;
- c) Força Cortante;

3.2. Flexão Pura

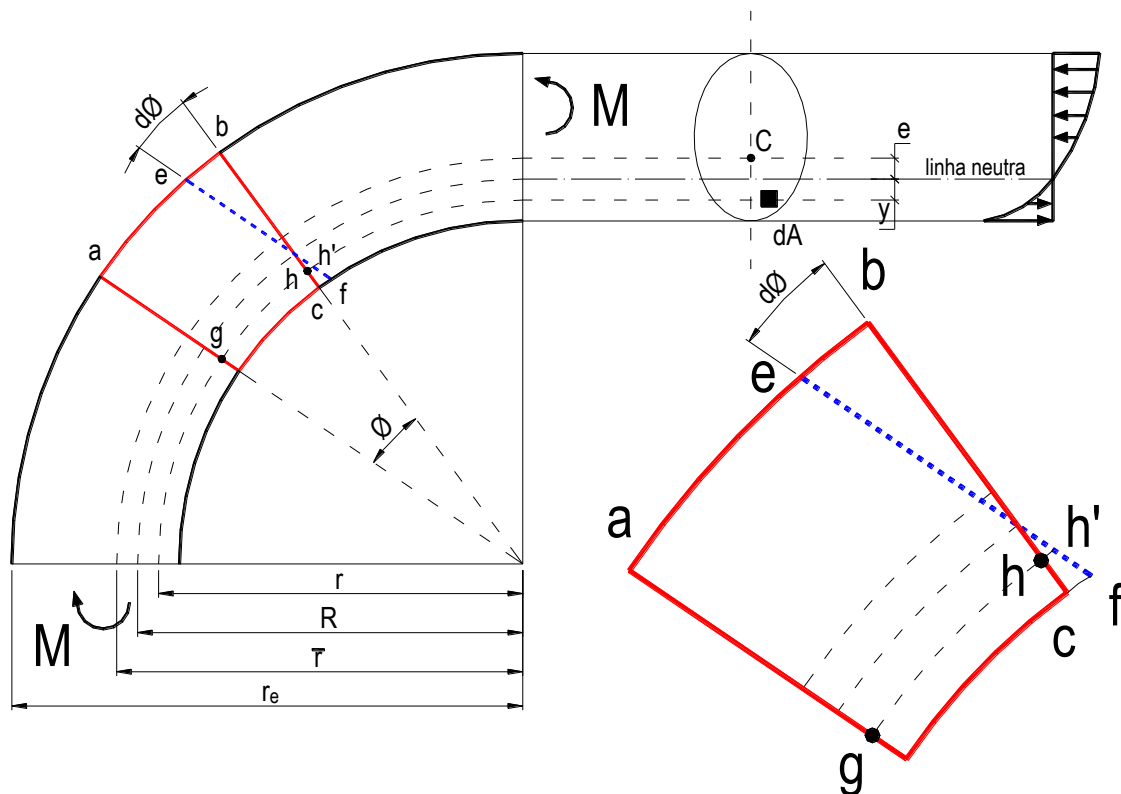
Considera-se, primeiramente, o caso de uma barra de seção transversal constante sujeita à flexão pura, produzida por conjugados aplicados em suas extremidades.

Convenção: O momento fletor é positivo quando tende a retificar a peça.

Hipótese Básica: As seções permanecem planas após a deformação (seções cheias).

- Seção bc ficará na posição ef, após a deformação, sofrendo um giro de $d\phi$;
- Seja uma fibra genérica gh compreendida entre duas seções que formam um ângulo ϕ , a deformação específica da fibra gh será:

$$\varepsilon = \frac{hh'}{gh} \text{ ou } \varepsilon = \frac{(R-r)d\phi}{r\phi}$$



Como $\sigma = E \cdot \varepsilon$, tem-se,

$$\sigma = \frac{E \cdot (R-r)d\phi}{r\phi} \rightarrow \frac{\sigma \cdot r}{(R-r)} = \frac{E \cdot d\phi}{\phi}$$

A posição da linha neutra pode ser obtida pela condição da estática, ou

$$\text{seja, } \sum F_n = 0 \text{ e } \int_A \sigma dA = 0 \rightarrow \int_A \frac{E \cdot (R-r)d\phi}{r\phi} dA = 0$$

Como E , R , ϕ e $d\phi$ são constantes, tem-se,

$$R \int \frac{dA}{r} - \int_A dA = 0 \rightarrow \boxed{R = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}}} \quad (\text{posição da linha neutra} \rightarrow \text{não passa pelo centróide})$$

Conhecendo-se R , a distribuição de tensões ficará conhecida fazendo-se a igualdade do momento interno da seção resistente com o momento aplicado M .

$$M = \int_A \underbrace{\sigma \cdot dA}_{\text{força}} \times \underbrace{(R-r)}_{\substack{\text{braço} \\ \text{de alavanca}}} \quad \text{ou} \quad M = \int_A \frac{E \cdot (R-r)^2 d\phi}{r\phi} dA$$

$$\text{como, } \frac{\sigma \cdot r}{(R-r)} = \frac{E \cdot d\phi}{\phi} \rightarrow M = \frac{\sigma \cdot r}{(R-r)} \int_A \frac{R^2 - 2Rr + r^2}{r} dA$$

$$M = \frac{\sigma \cdot r}{(R-r)} \left[\int_A \frac{R^2 dA}{r} - R \int_A dA - R \int_A dA + \int_A r \cdot dA \right]$$

Ou então,

$$M = \frac{\sigma \cdot r}{(R-r)} \left[\underbrace{R \left(R \int_A \frac{dA}{r} - \int_A dA \right)}_0 - \underbrace{R \int_A dA}_{R \cdot A} + \underbrace{\int_A r \cdot dA}_{\bar{r} \cdot A} \right] \rightarrow$$

$$M = \frac{\sigma \cdot r}{(R-r)} (\bar{r} \cdot A - R \cdot A) = \frac{\sigma \cdot r \cdot A}{(R-r)} (\bar{r} - R) \rightarrow$$

$$\boxed{\sigma = \frac{M \cdot (R-r)}{r \cdot A (\bar{r} - R)}} \Rightarrow \text{Eq. das Tensões (Hipérbole)}$$

No caso de y ser positivo quando medido a partir do eixo neutro, na direção do centro de curvatura, tem-se,

$$R - r = y \rightarrow r = R - y \quad \text{e} \quad \text{como } e = \bar{r} - R, \text{ tem-se,}$$

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{A \cdot e (R - y)} \quad \text{que para vigas retas,} \quad \sigma = \frac{M \cdot y}{I}$$

A máxima tensão em módulo é sempre verificada no lado interno (côncavo) da peça. Tal fato provém do eixo neutro estar deslocado na direção do centro de curvatura da peça.

Tal expressão só é válida para a distribuição de tensões em regime elástico em vigas sujeitas somente à momento fletor.

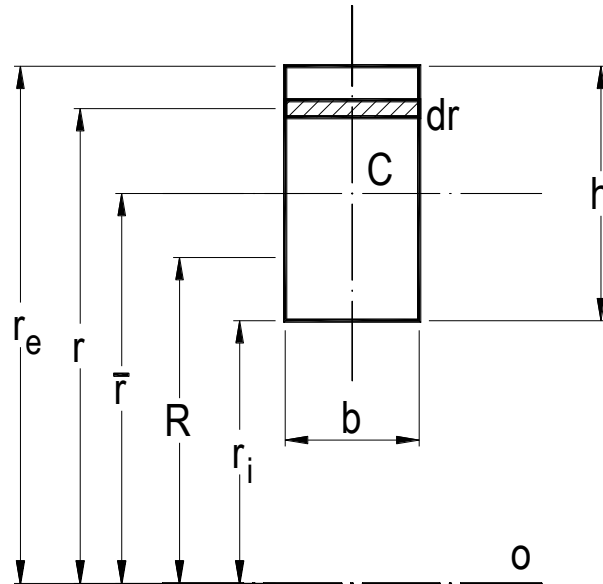
3.3. Flexão Composta

Para o caso de a seção em estudo estar submetida a esforços de flexão e esforços normais, a tensão normal será obtida pela superposição dos efeitos, através da equação a seguir. Nesta equação, a primeira parcela fornece a tensão normal devido ao esforço normal na seção e a segunda, a tensão normal devido à flexão.

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M \cdot (R - r)}{r \cdot A (\bar{r} - R)}$$

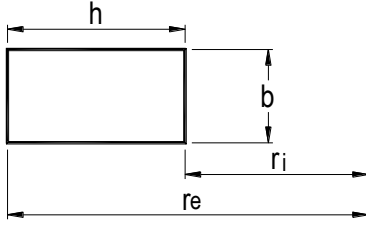
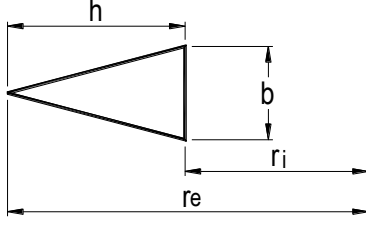
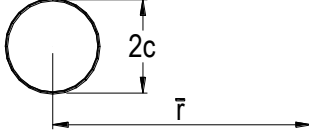
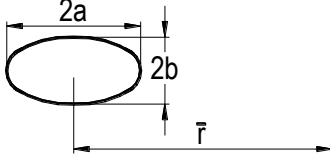
3.4. Cálculo de R (Posição da Linha Neutra)

Para o caso de seções retangulares, tem-se,



$$R = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}}, \text{ onde } A = b \cdot h \quad \text{e} \quad \int_A \frac{dA}{r} = \int_{\bar{r}-h/2}^{\bar{r}+h/2} \frac{b \cdot dr}{r} = b \cdot \ln \left(\frac{\bar{r} + h/2}{\bar{r} - h/2} \right) = b \cdot \ln(r_e - r_i)$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{h}{\ln \left(\frac{\bar{r} + h/2}{\bar{r} - h/2} \right)}} \Rightarrow \boxed{R = \frac{h}{\ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right)}}$$

Figura geométrica	Área	$\int_A \frac{dA}{r}$
	$b(r_e - r_i)$	$b \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$
	$\frac{b}{2}(r_e - r_i)$	$\frac{b \cdot r_e}{r_e - r_i} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) - b$
	πc^2	$2\pi \left(\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - c^2} \right)$
	πab	$\frac{2\pi b}{a} \left(\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - a^2} \right)$

Desenvolvendo-se as funções logarítmicas em série e tomando-se o primeiro termo da série, o que para $h/r < 1/2$ oferece precisão suficiente, tem-se,

$$e = \frac{1}{3} \times \bar{r} \times \left(\frac{h}{2\bar{r}} \right)^2$$

Para o caso de seções circulares, tem-se,

$$e \cong \frac{1}{2} \left(\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - c^2} \right), \text{ onde } c \text{ é o raio da seção transversal.}$$

Exemplo 3.1 – Comparar as tensões na viga de seção retangular de (0,50 x 0,50)m submetida a um momento fletor de 2000 kN.m para os seguintes casos:

- a) Viga Reta;
- b) Viga Curva com raio de curvatura na linha dos centróides de 2,5 m;
- c) Viga Curva com $\bar{r}=0,75$ m.

Solução:

a) Viga Reta

$$W = \frac{I}{c} = \frac{b \cdot h^3}{12} \times \frac{2}{h} = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{500 \cdot 500^2}{6} = 20,83 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M}{W} = \frac{2000 \times 10^6 \text{ Nmm}}{20,83 \times 10^6 \text{ Nmm}} = 96 \text{ MPa}$$

b) Viga Curva com $\bar{r} = 2500$ mm.

$$r_e = 2,5 + 0,25 = 2750 \text{ mm}$$

$$r_i = 2,5 - 0,25 = 2250 \text{ mm}$$

$$R = \frac{500}{\ln\left(\frac{2,75}{2,25}\right)} = 2491,644 \text{ mm}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{0,20067}$

- Para valores de R sempre usar 3 casas decimais.

$$e = \bar{r} - R = 2,5 - 2,49164 = 0,00836 \text{ m} = 8,36 \text{ mm}$$

Logo, as tensões serão:

$$\sigma_i = \frac{M(R - r_i)}{r_i \cdot A \cdot (\bar{r} - R)} = \frac{2000 \times 10^6 \text{ Nmm} \times (2491,644 - 2250)}{2250 \text{ mm} \times 500 \times 500 (8,36 \text{ mm})} = 102,8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_e = \frac{M(R - r_e)}{r_e \cdot A(\bar{r} - R)} = \frac{2000 \times 10^6 \text{ Nmm} \times (2491,644 - 2750)}{2750 \text{ mm} \times 500 \times 500 (8,36 \text{ mm})} = -89,9 \text{ MPa}$$

c) Viga Curva com $\bar{r} = 750 \text{ mm}$.

$$\begin{aligned} r_e &= 1000 \text{ mm} \\ r_i &= 500 \text{ mm} \end{aligned} \quad R = \frac{500}{\ln\left(\frac{1000}{500}\right)} = 721,348 \text{ mm}$$

$$e = \bar{r} - R = 750 - 721,348 = 28,6525 \text{ mm}$$

$$\sigma_i = \frac{M(R - r_i)}{r_i \cdot A(\bar{r} - R)} = \frac{2000 \times 10^6 \times (721,348 - 500)}{500^3 \times (28,6525)} = 123,6 \text{ MPa}$$

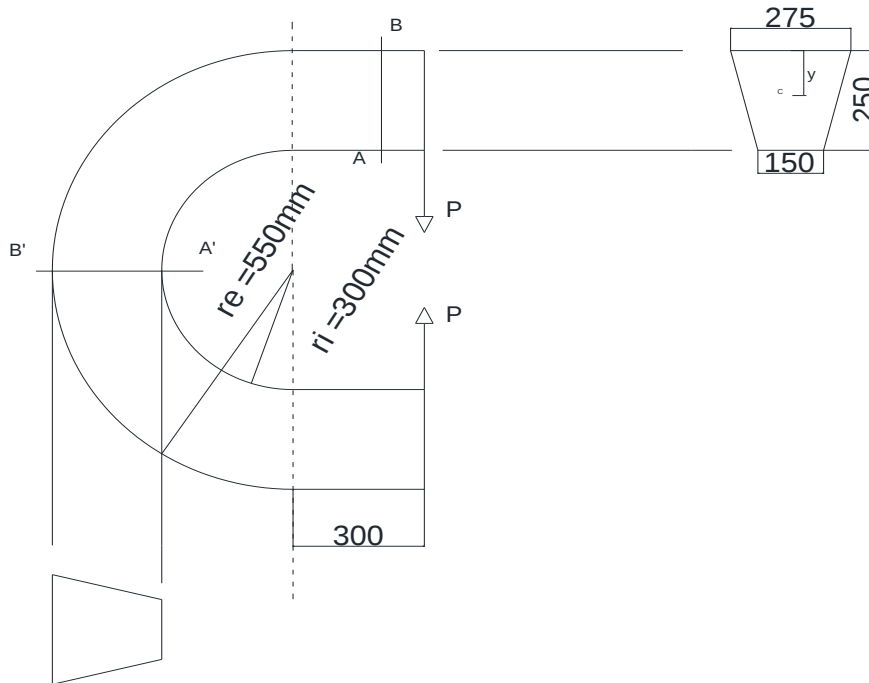
$$\sigma_e = \frac{M(R - r_e)}{r_e \cdot A(\bar{r} - R)} = \frac{2000 \times 10^6 \times (721,348 - 1000)}{1000 \times 500^2 \times (28,6525)} = -77,8 \text{ MPa}$$

Erro percentual devido ao uso da Lei Linear

$\frac{\bar{r}}{h}$	σ_i	σ_e
1	+36,4	-34,8
2	+16,5	-16,5
3	+11,8	-10,9
4	+8,1	-8,4
5	+6,4	-7,0
10	+3,4	-3,2

Para $\frac{\bar{r}}{h} \geq 10$, é possível para o cálculo de tensões, desprezar-se o efeito da curvatura da peça.

Exemplo 3.2 – Qual a carga máxima que a peça abaixo resiste sabendo-se que, $r_e = 550 \text{ mm}$ e $r_i = 300 \text{ mm}$, e que o material é frágil com $\sigma_t = 100 \text{ MPa}$ e $\sigma_c = 180 \text{ MPa}$?



$$\bar{y} = \frac{\sum A \cdot y}{\sum A} = \frac{2 \times \frac{62,5 \times 250}{2} \times \frac{250}{3} + (150 \times 250) \times \frac{250}{2}}{2 \times \frac{62,5 \times 250}{2} + (150 \times 250)} = 112,74 \text{ mm}$$

$$M = -P \cdot d = -P[300 + 300 + (250 - 112,74)] = -737,26 \cdot P$$

=> Posição da Linha Neutra

Retângulo

$$\int_A \frac{dA}{r} = b \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = 275 \cdot \ln\left(\frac{550}{300}\right) = 166,6873 \text{ mm}$$

Triângulo

$$\int_A \frac{dA}{r} = \frac{b \cdot r_2}{(r_2 - r_1)} \times \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) - b = \frac{62,5 \cdot 550}{550 - 300} \cdot \ln\left(\frac{550}{300}\right) - 62,5 = 20,8437 \text{ mm}$$

$$R = \frac{\sum A}{\sum \int_A \frac{dA}{r}} = \frac{275.250 - 2\left(\frac{1}{2} \cdot 62,5 \cdot 250\right)}{166,6873 - 2 \cdot (20,8437)} = 425,000 \text{ mm}$$

$$\bar{r} = r_i + 250 - \bar{y} = 300 + 250 - 112,74 = 437,26 \text{ mm}$$

$$\sigma_A^{comp} = \frac{P}{A} + \frac{M(R - r_i)}{r_i \cdot A \cdot (\bar{r} - R)} = \frac{-P}{53125} + \left(\frac{-737,26 \cdot P \cdot (425 - 300)}{300 \cdot 53125 \cdot (437,26 - 425)} \right) = -490,4 \times 10^{-6} P$$

$$\sigma_A^{tração} = \frac{P}{A} + \frac{M(R - r_e)}{r_e \cdot A \cdot (\bar{r} - R)} = \frac{-P}{53125} + \left(\frac{-737,26 \cdot P \cdot (425 - 550)}{550 \cdot 53125 \cdot (437,26 - 425)} \right) = 238,46 \cdot 10^{-6} P$$

Frágil e $\sigma_t \neq \sigma_c$, Critério da Falha de Mohr

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_t} - \frac{\sigma_2}{\sigma_c} < 1$$

$$\text{Para A': } -\frac{\sigma_2}{\sigma_c} < 1; \quad \frac{-(-490,4 \cdot 10^{-6})}{180} P < 1 \Rightarrow P = 367,0 \text{ kN}$$

Logo, $P = 367 \text{ kN}$

$$\text{Para B': } \frac{\sigma_1}{\sigma_t} < 1; \quad \frac{238,46 \cdot 10^{-6}}{100} \cdot P < 1 \Rightarrow P = 419,4 \text{ kN}$$