

# CAPÍTULO 5 Vigas sobre base elástica

Este capítulo vai apresentar as bases para o estudo estático e elástico da flexão simples de vigas suportadas diretamente pelo terreno (que constitui, então, num apoio elástico contínuo para estas vigas), de trilhos de estradas de ferro (suportados por dormentes que, devido à pequena distância entre estes em relação ao comprimento total, podem ser considerados como um apoio elástico contínuo), de estacas verticais submetidas a cargas horizontais em seu topo (o terreno em contato com o fuste das estacas será o apoio elástico contínuo) e de quaisquer outros tipos de peças cujos apoios elásticos possam, com precisão satisfatória, ser considerados contínuos.

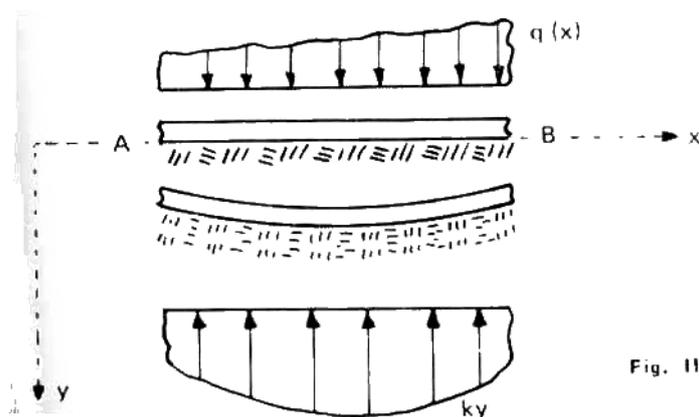


Fig. III

## 5.1. Vigas de comprimento infinito

O apoio elástico (solo) exerce sobre a viga, em cada seção, uma reação de apoio proporcional ao deslocamento vertical  $y$  sofrido por esta seção, igual  $Ky$ , sendo  $K$  a constante de mola do meio elástico que serve de apoio.

A hipótese simples de que a reação contínua da base seja proporcional ao afundamento, é uma aproximação satisfatória em muitos casos da prática (exemplo das estradas de ferro – comprovação experimental).

Pela curva elástica da viga, tem-se a equação diferencial,

$$EI_z \frac{d^4 y}{dx^4} = q \quad (1)$$

onde  $q$  representa a intensidade da carga que atua na viga.

Para um trecho sem carga, a única força que atua é a reação distribuída continuamente do lado da base e que tem intensidade  $k \cdot y$  sendo  $q = -k \cdot y$ ,

$$EI_z \frac{d^4 y}{dx^4} = -k \cdot y \quad (2)$$

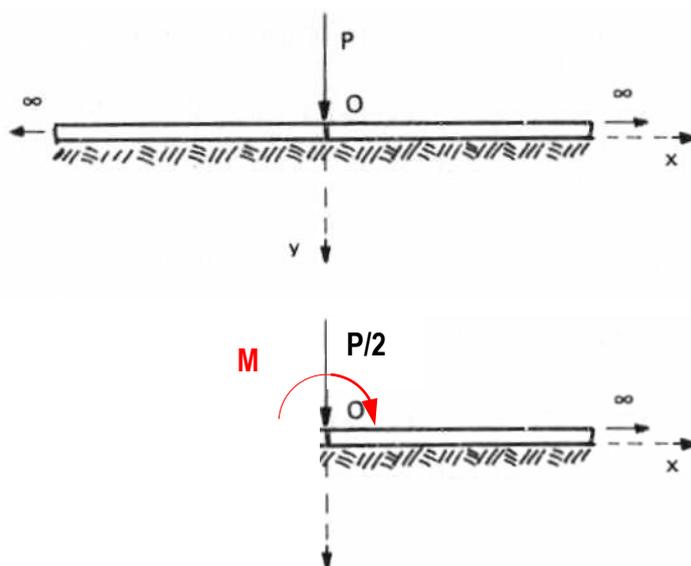
Fazendo  $\sqrt[4]{\frac{K}{4EI_z}} = \beta$  a solução geral da equação acima pode ser escrita da seguinte forma,

$$y = e^{\beta x} (A \cdot \cos \beta x + B \cdot \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C \cdot \cos \beta x + D \cdot \sin \beta x) \quad (3)$$

Nos casos particulares, as constantes arbitrárias A, B, C e D da solução devem ser determinadas por meio de condições em certos pontos.

### 5.1.1. Atuação de uma carga concentrada

Supondo, como exemplo, uma única carga concentrada atuando numa viga infinitamente longa.



O → origem das coordenadas

Simetria → considera-se apenas a metade da viga

Usando a solução geral (3) para este caso, determinam-se as constantes arbitrárias.

Admitindo-se que o deslocamento vertical e as curvaturas, em pontos infinitamente distantes da força P, são iguais a zero, tem-se  $A = B = 0$ .

Logo,

$$y = e^{-\beta x}(C \cdot \cos \beta x + D \cdot \sin \beta x) \quad (4)$$

As constantes C e D devem ser determinadas pelas condições na origem, ou seja,  $x = 0$ . Neste ponto, a linha elástica deve ter tangente horizontal,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0 \quad (5)$$

Em (4) tem-se,

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow -\beta \cdot e^{-\beta x}(C \cdot \cos \beta x + D \cdot \sin \beta x + C \cdot \sin \beta x - D \cdot \cos \beta x) = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0 \Rightarrow C - D = 0 \Rightarrow C = D$$

A equação (4) torna-se:

$$y = C \cdot e^{-\beta x}(\cos \beta x + \sin \beta x) \quad (6)$$

As derivadas consecutivas dessa equação são:

$$\frac{dy}{dx} = -2\beta C e^{-\beta x} \sin \beta x \quad (7)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\beta^2 C e^{-\beta x}(\sin \beta x - \cos \beta x) \quad (8)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 4\beta^3 C e^{-\beta x}(\cos \beta x) \quad (9)$$

A constante C pode ser obtida pela condição de que o cortante em  $x = 0$ , é igual a  $-\frac{P}{2}$  para a parte a direita da viga. Para isso, torna-se necessário saber

$$\text{que: } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{V}{EI} \quad \text{e} \quad \frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{q}{EI}.$$

$$Q_x = 0 = \left( \frac{dM}{dx} \right)_{x=0} = -EI_z \left( \frac{d^3y}{dx^3} \right)_{x=0} = -\frac{P}{2}$$

$$EI_z \cdot 4\beta^3 C = \frac{P}{2} \quad \boxed{C = \frac{P}{8\beta^3 EI_z}}$$

Logo nas equações (6) e (8) respectivamente, tem-se:

$$y = \frac{P}{8\beta^3 EI_z} \cdot e^{-\beta x} (\cos \beta x + \text{sen} \beta x) \quad \text{com} \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI_z}}$$

$$y = \frac{P\beta}{2K} e^{\beta x} (\cos \beta x + \text{sen} \beta x) \quad (\text{equação dos deslocamentos}) \quad (10)$$

$$M = -EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{4\beta} e^{-\beta x} (\text{sen} \beta x - \cos \beta x) \quad (\text{equação do momento}) \quad (11)$$

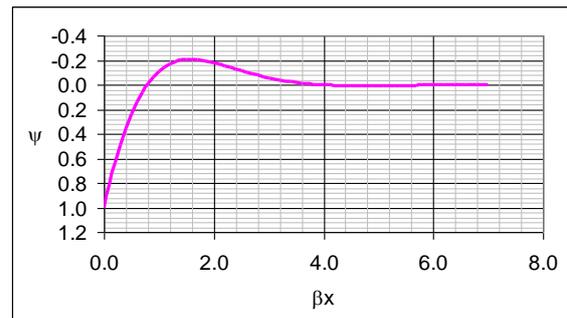
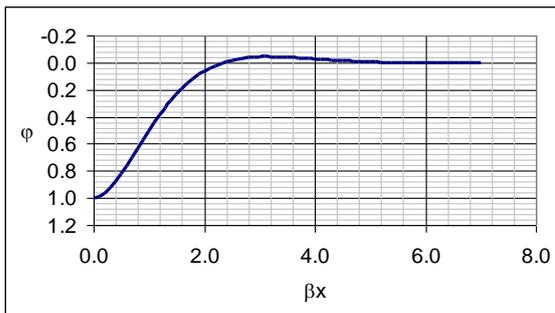
Para simplificar, tem-se as equações de funções auxiliares a seguir:

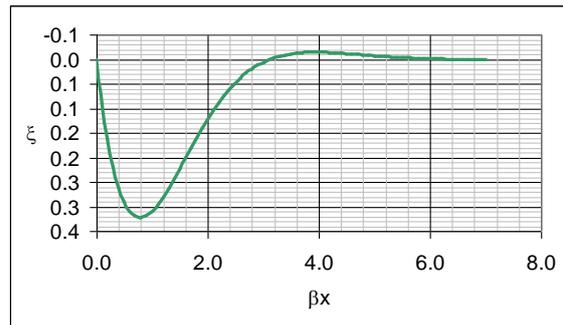
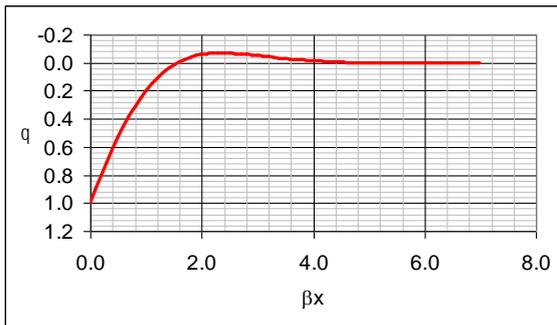
$$\varphi = e^{-\beta x} (\cos \beta x + \text{sen} \beta x) \quad (12)$$

$$\psi = -e^{-\beta x} (\text{sen} \beta x - \cos \beta x) \quad (13)$$

$$\theta = e^{-\beta x} \cos \beta x \quad (14)$$

$$\xi = e^{-\beta x} \text{sen} \beta x \quad (15)$$





$$a = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi^4 \sqrt{\frac{4EI_z}{k}} \quad \text{comprimento de onda dado pelo período das funções } \cos\beta x \text{ e } \sin\beta x$$

Que fornecem então:

$$y = \frac{P\beta}{2k} \varphi(\beta x) \quad (16)$$

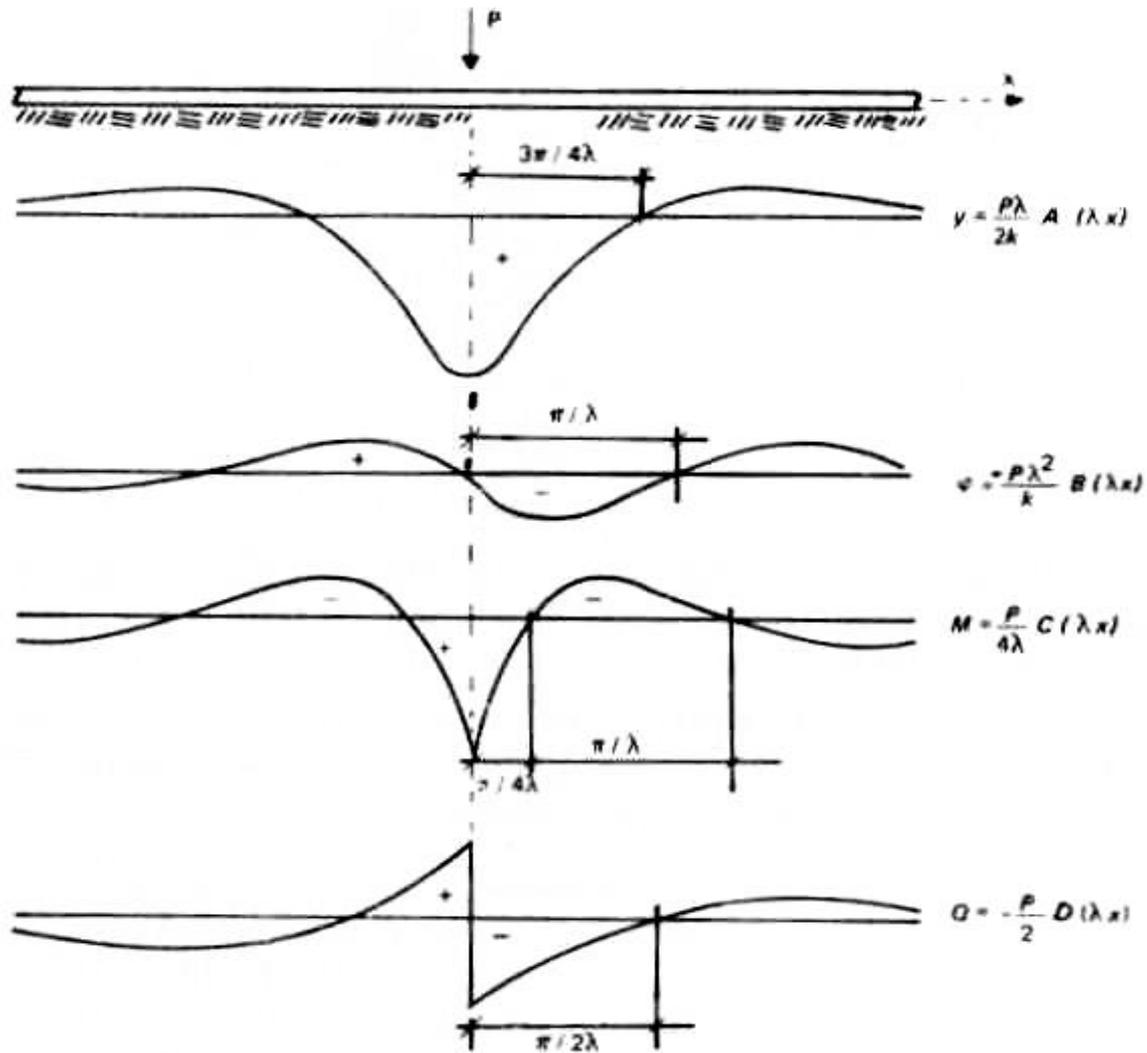
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P\beta^2}{k} \xi(\beta x) \quad (17)$$

$$M = -EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{4\beta} \psi(\beta x) \quad (18)$$

$$Q = -EI_z \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{P}{2} \theta(\beta x) \quad (19)$$

Convenção de sinais:

P e y → Positivos p/ baixo  
M e Q → Convenção clássica de sinais



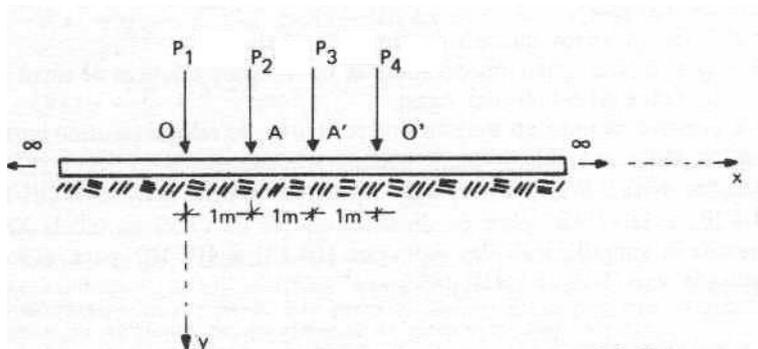
A tabela apresentada a seguir auxilia no cálculo do deslocamento, da curvatura, do momento e do cortante fornecendo os valores a serem substituídos nas equações anteriores (16) e (19):

$\beta x$	$\varphi$	$\psi$	$\theta$	$\xi$
<b>0.0</b>	<b>1.0000000</b>	<b>1.0000000</b>	<b>1.0000000</b>	<b>0.0000000</b>
0.1	0.9906500	0.8099840	0.9003170	0.0903330
0.2	0.9650673	0.6397540	0.8024106	0.1626567
0.3	0.9266574	0.4888039	0.7077307	0.2189268
0.4	0.8784406	0.3563707	0.6174056	0.2610349
0.5	0.8230670	0.2414944	0.5322807	0.2907863
0.6	0.7628361	0.1430714	0.4529538	0.3098824
0.7	0.6997184	0.0599004	0.3798094	0.3199090
0.8	0.6353794	-0.0092784	0.3130505	0.3223289
0.9	0.5712047	-0.0657492	0.2527278	0.3184770
<b>1.0</b>	<b>0.5083260</b>	<b>-0.1107938</b>	<b>0.1987661</b>	<b>0.3095599</b>
1.1	0.4476462	-0.1456681	0.1509890	0.2966572
1.2	0.3898648	-0.1715847	0.1091401	0.2807248
1.3	0.3355022	-0.1896983	0.0729019	0.2626002
1.4	0.2849223	-0.2010955	0.0419134	0.2430089

1.5	0.2383548	-0.2067876	0.0157836	0.2225712
1.6	0.1959151	-0.2077057	-0.0058953	0.2018104
1.7	0.1576231	-0.2046986	-0.0235378	0.1811608
1.8	0.1234197	-0.1985322	-0.0375563	0.1609759
1.9	0.0931828	-0.1898908	-0.0483540	0.1415368
<b>2.0</b>	<b>0.0667407</b>	<b>-0.1793794</b>	<b>-0.0563193</b>	<b>0.1230600</b>
2.1	0.0438839	-0.1675272	-0.0618217	0.1057055
2.2	0.0243762	-0.1547917	-0.0652078	0.0895840
2.3	0.0079635	-0.1415636	-0.0668001	0.0747635
2.4	-0.0056182	-0.1281715	-0.0668948	0.0612766
2.5	-0.0166363	-0.1148875	-0.0657619	0.0491256
2.6	-0.0253561	-0.1019323	-0.0636442	0.0382881
2.7	-0.0320363	-0.0894809	-0.0607586	0.0287223
2.8	-0.0369259	-0.0776672	-0.0572966	0.0203707
2.9	-0.0402610	-0.0665895	-0.0534252	0.0131643
<b>3.0</b>	<b>-0.0422629</b>	<b>-0.0563148</b>	<b>-0.0492888</b>	<b>0.0070260</b>
3.1	-0.0431371	-0.0468834	-0.0450102	0.0018732
3.2	-0.0430722	-0.0383132	-0.0406927	-0.0023795
3.3	-0.0422395	-0.0306032	-0.0364214	-0.0058182
3.4	-0.0407935	-0.0237370	-0.0322652	-0.0085282
3.5	-0.0388713	-0.0176858	-0.0282785	-0.0105927
3.6	-0.0365941	-0.0124115	-0.0245028	-0.0120913
3.7	-0.0340674	-0.0078686	-0.0209680	-0.0130994
3.8	-0.0313823	-0.0040068	-0.0176946	-0.0136877
3.9	-0.0286160	-0.0007726	-0.0146943	-0.0139217
<b>4.0</b>	<b>-0.0258332</b>	<b>0.0018894</b>	<b>-0.0119719</b>	<b>-0.0138613</b>
4.1	-0.0230874	0.0040347	-0.0095264	-0.0135610
4.2	-0.0204215	0.0057180	-0.0073517	-0.0130698
4.3	-0.0178693	0.0069928	-0.0054383	-0.0124311
4.4	-0.0154564	0.0079099	-0.0037732	-0.0116831
4.5	-0.0132011	0.0085176	-0.0023417	-0.0108594
4.6	-0.0111158	0.0088611	-0.0011273	-0.0099884
4.7	-0.0092073	0.0089819	-0.0001127	-0.0090946
4.8	-0.0074781	0.0089183	0.0007201	-0.0081982
4.9	-0.0059270	0.0087048	0.0013889	-0.0073159
<b>5.0</b>	<b>-0.0045499</b>	<b>0.0083725</b>	<b>0.0019113</b>	<b>-0.0064612</b>
5.1	-0.0033400	0.0079489	0.0023044	-0.0056445
5.2	-0.0022890	0.0074582	0.0025846	-0.0048736
5.3	-0.0013871	0.0069216	0.0027672	-0.0041543
5.4	-0.0006236	0.0063569	0.0028666	-0.0034903
5.5	0.0000128	0.0057796	0.0028962	-0.0028834
5.6	0.0005336	0.0052023	0.0028679	-0.0023343
5.7	0.0009503	0.0046355	0.0027929	-0.0018426
5.8	0.0012744	0.0040876	0.0026810	-0.0014066
5.9	0.0015166	0.0035650	0.0025408	-0.0010242
<b>6.0</b>	<b>0.0016874</b>	<b>0.0030726</b>	<b>0.0023800</b>	<b>-0.0006926</b>
6.1	0.0017968	0.0026139	0.0022053	-0.0004086
6.2	0.0018538	0.0021910	0.0020224	-0.0001686
6.3	0.0018669	0.0018052	0.0018360	0.0000309
6.4	0.0018439	0.0014566	0.0016502	0.0001937
6.5	0.0017917	0.0011448	0.0014682	0.0003234

6.6	0.0017165	0.0008689	0.0012927	0.0004238
6.7	0.0016239	0.0006272	0.0011255	0.0004983
6.8	0.0015186	0.0004180	0.0009683	0.0005503
6.9	0.0014050	0.0002391	0.0008221	0.0005829
<b>7.0</b>	<b>0.0012866</b>	<b>0.0000884</b>	<b>0.0006875</b>	<b>0.0005991</b>

**Exemplo 5.1** – Obter os deslocamentos verticais e os momentos fletores atuantes sob os pontos de aplicação das cargas de 50kN indicadas abaixo para a viga infinita cuja rigidez à flexão  $EI$  é igual a  $10^4$  kN.m<sup>2</sup> e que se apóia sobre um meio elástico cuja constante de mola é  $k = 4 \times 10^4$  kN/m<sup>2</sup>.



$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 50 \text{ kN}$$

**Solução:**

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2}{4 \cdot 10^4 \text{ kN.m}^2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{\text{m}^4}} = \frac{1}{\text{m}}$$

Escolhendo para origem do sistema de coordenadas a primeira das cargas concentradas, tem-se a partir da tabela abaixo, empregando-se o princípio da superposição dos efeitos, que:

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
$\beta x$	0	1	2	3
$\varphi$	1	0,5083	0,0667	-0,0423
$\psi$	1	-0,1108	-0,1794	-0,0563

$$M_0 = \frac{P}{4\beta} \psi(\beta x) = \frac{50 \text{ kN}}{4 \cdot \frac{1}{\text{m}}} (1 - 0,1108 - 0,1794 - 0,0563) \Rightarrow M_0 = 8,17 \text{ kN.m}$$

$$\delta_0 = \frac{P\beta}{2k} \varphi(\beta x) = \frac{50 \text{ kN} \cdot \frac{1}{\text{m}}}{2 \cdot 2.4 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2} (1 + 0,5083 + 0,0667 - 0,0423) \Rightarrow \delta_0 = 0,000957 \text{ m}$$

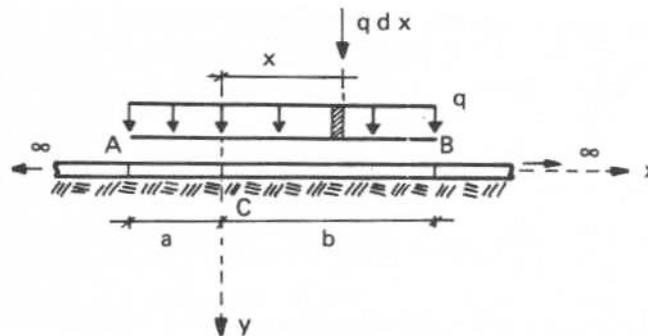
$$M_A = \frac{P}{4\beta} \psi(\beta x) = \frac{50 \text{ kN}}{4 \cdot \frac{1}{\text{m}}} (1 - 2(0,1108) - 0,1794) \Rightarrow M_A = 7,49 \text{ kN.m}$$

$$\delta_A = \frac{P\beta}{2k} \varphi(\beta x) = \frac{50}{2 \cdot 2.4 \cdot 10^4} (1 + 2(0,5083) + 0,0667) \Rightarrow \delta_A = 0,0013 \text{ m}$$

Devido a simetria existente (pois a viga é infinita), os valores encontrados para as seções O e A são também válidos para as seções O' e A', respectivamente.

### 5.1.2. Atuação de uma carga uniformemente distribuída

Seja uma viga da figura abaixo submetida a uma carga uniformemente distribuída



O deslocamento em C, produzido por um elemento  $qdx$  da carga é obtido substituindo-se  $P$  por  $qdx$  na equação (11a),

$$y = \frac{qdx}{8\beta^3 EI_z} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \text{sen} \beta x)$$

O deslocamento em A provocado pela carga distribuída ao longo do comprimento  $l$  será:

$$y = \int_0^a \frac{qdx}{8\beta^3 EI_z} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \text{sen} \beta x) + \int_0^b \frac{qdx}{8\beta^3 EI_z} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \text{sen} \beta x)$$

$$y = \frac{q}{2k} (2 - e^{-\beta a} \cos \beta a - e^{-\beta b} \cos \beta b) \quad (20)$$

Para valores de  $a$  e  $b$  grandes, os valores de  $e^{-\beta a}$  e  $e^{-\beta b}$  serão pequenos e o deslocamento  $y$  será igual a aproximadamente  $q/k$ , ou seja, em pontos muito afastados das extremidades da parte carregada da viga, a flexão da barra pode ser desprezada e pode-se admitir que a carga uniformemente distribuída  $q$  é transmitida diretamente à base elástica.

Comparando-se a equação (20) com a equação (10) e observando-se as equações (12) a (15), tem-se,

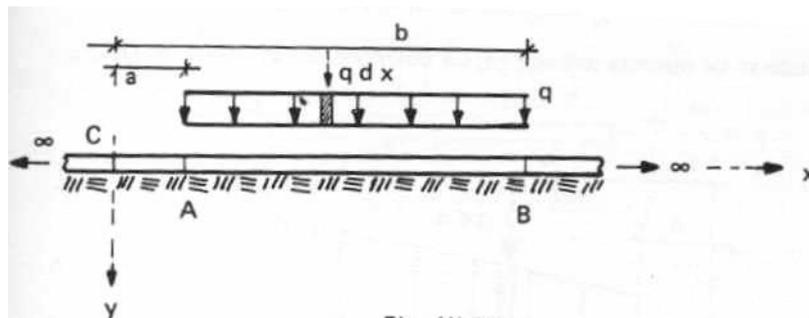
$$y = \frac{q}{2k} [2 - \theta(\beta a) - \theta(\beta b)] \quad (21)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q\beta}{2k} [\varphi(\beta a) - \varphi(\beta b)] \quad (22)$$

$$M = \frac{q}{4\beta^2} [\xi(\beta a) + \xi(\beta b)] \quad (23)$$

$$Q = \frac{q}{4\beta} [\psi(\beta a) - \psi(\beta b)] \quad (24)$$

Supondo agora uma seção situada fora do trecho compreendido sob o carregamento.



Seguindo-se o mesmo procedimento adotando anteriormente, tem-se,

$$y = \frac{q\beta}{2k} \int_b^a e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) dx \Rightarrow y = \frac{q}{2k} (e^{-\beta a} \cos \beta a - e^{-\beta b} \cos \beta b)$$

Logo, utilizando-se as equações (12) a (15), tem-se,

$$y = \frac{q}{2k} [\theta(\beta a) - \theta(\beta b)] \quad (25)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q\beta}{2k} [\varphi(\beta a) - \varphi(\beta b)] \quad (26)$$

$$M = \frac{-q}{4\beta^2} [\xi(\beta a) - \xi(\beta b)] \quad (27)$$

$$Q = \frac{q}{4\beta} [\psi(\beta a) - \psi(\beta b)] \quad (28)$$

### 5.1.3. Atuação de uma carga momento

Seja a viga infinita abaixo submetida à atuação de uma carga momento  $M_0$  aplicada na origem,



Pode-se fazer o problema recair no caso de carga concentrada substituindo-se a carga momento  $M_0$  por um binário com a tendendo para zero.

$$y(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{Pa\beta}{2k} \{ \varphi(\beta x) - \varphi[\beta(x+a)] \} \Rightarrow$$

$$y(x) = -\frac{Pa\beta}{2k} \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{\varphi[\beta(x+a)] - \varphi(\beta x)}{a} \right\}$$

Entretanto, sabe-se que,  $\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\}$  é a definição de derivada.

$$y(x) = -\frac{M_0\beta}{2k} \frac{d[\varphi(\beta x)]}{dx}$$

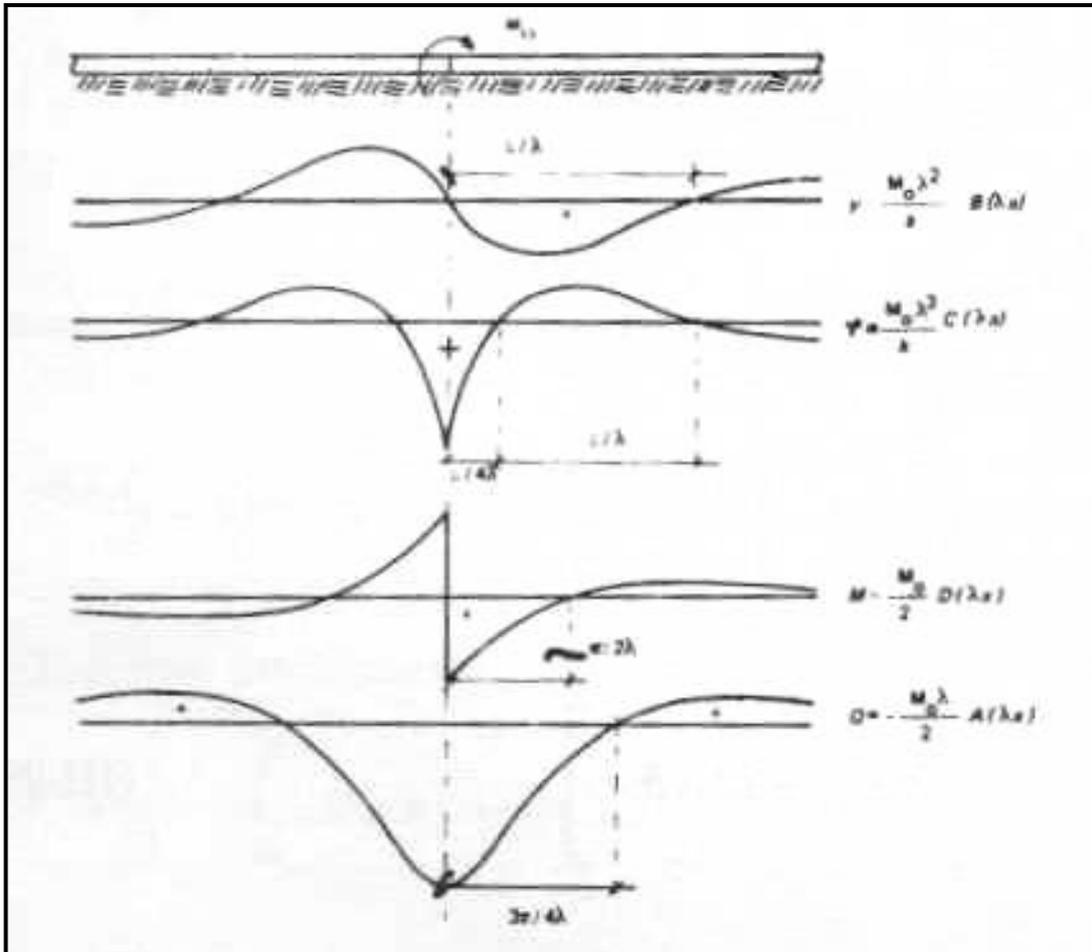
$$y(x) = -\frac{M_0\beta}{2k} [-2\beta\xi(\beta x)] = \frac{M_0\beta^2}{k} \xi(\beta x)$$

$$y(x) = \frac{M_0 \beta^2}{k} \xi(\beta x) \quad (29)$$

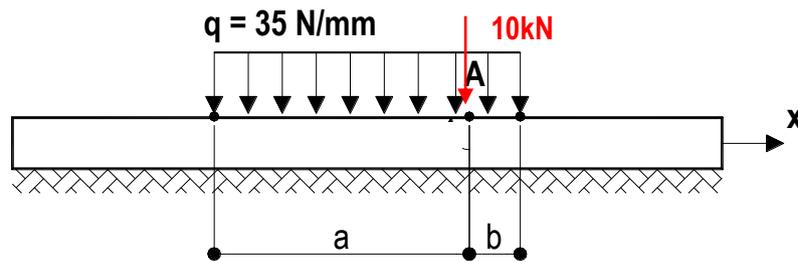
$$\frac{dy}{dx} = \frac{M_0 \beta^3}{k} \psi(\beta x) \quad (30)$$

$$M(x) = \frac{M_0}{2} \theta(\beta x) \quad (31)$$

$$Q(x) = -\frac{M_0 \beta}{2} \varphi(\beta x) \quad (32)$$



**Exemplo 5.2** – Obter o deslocamento e o momento fletor no ponto A da viga infinita abaixo sabendo-se que  $EI = 344 \times 10^9 \text{ N.mm}^2$  e  $\beta = 6,3 \times 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$ .

**Solução:**1) Carga concentrada  $P=10\text{kN}$ 

$$y_A^P = \frac{P\beta}{2k} \varphi(\beta x)$$

$$M_A^P = \frac{P}{4\beta} \varphi(\beta x)$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{EI}} \Rightarrow k = \beta^4 4EI$$

$$k = \left( \frac{6 \times 3 \times 10^{-4}}{\text{mm}} \right)^4 \times 4 \times 344 \times 10^9 \text{ N.mm}^2$$

$$k = 0,217 \text{ N/mm}^2$$

- Ponto A  $\rightarrow \beta x = 0$

$$y_A^P = \frac{10 \times 10^3 \times 6,3 \times 10^{-4}}{2(0,217)} \Rightarrow y_A^P = 14,53 \text{ mm}$$

$$M_A^P = \frac{10 \times 10^3 \times 1}{4 \times 6,3 \times 10^{-4}} \Rightarrow M_A^P = 3,97 \text{ kN.m}$$

## 2) Carga distribuída

$$y_A^q = \frac{q}{2k} [2 - \theta(\beta a) - \theta(\beta b)]$$

$$y_A^q = \frac{35}{2 \times 0,217} [2 - 0,7077 - 0,9003]$$

$$y_A^q = 31,61 \text{ mm}$$

$$M_A^q = \frac{q}{4\beta^2} [\xi(\beta a) + \xi(\beta b)]$$

$$M_A^q = \frac{35}{4 \times (6,3 \times 10^{-4})^2} (0,2189 + 0,0903)$$

$$M_A^q = 6,82 \text{ kN.m}$$

$$\beta a = 6,13 \times 10^{-4} \times 476,19$$

$$\beta a = 0,30$$

$$\beta b = 6,3 \times 10^{-4} \times 158,73$$

$$\beta b = 0,10$$

$$\theta(\beta a) = 0,7077$$

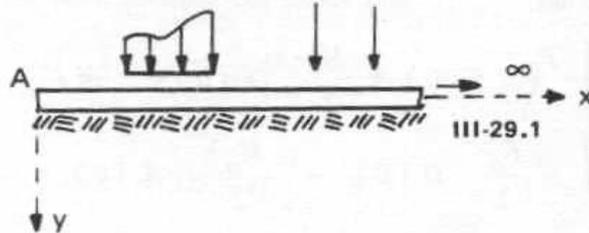
$$\theta(\beta b) = 0,9003$$

$$\xi(\beta a) = 0,2189$$

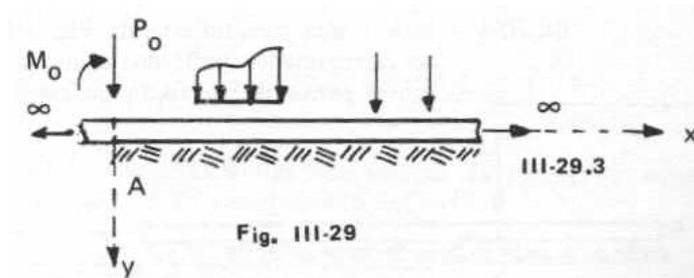
$$\xi(\beta b) = 0,0903$$

## 5.2. Vigas semi-infinitas

### 5.2.1. Vigas semi-infinitas com bordo livre



Seja a viga semi-infinita acima, submetida ao carregamento indicado, que se deseja resolver. Procura-se então a maneira pela qual pode-se fazer com que sua resolução recaia na solução de uma viga infinita (problema resolvido anteriormente).



Para resolver a viga infinita acima (sem  $M_0$  e  $P_0$ ) considera-se sua diferença estática da viga semi-infinita como sendo a existência em A, de um momento fletor  $M_A$  e de um esforço cortante  $Q_A$  que mantém a continuidade entre os trechos semi-infinitos da viga à esquerda e à direita de A. Se  $M_A=Q_A=0$ , equivale dizer que não existe ação estática da parte (carregada) da viga à direita de A sobre a parte (descarregada) da viga a esquerda de A, que não estaria, então, trabalhando. Deste modo, fazendo desaparecer  $M_A$  e  $Q_A$  para a viga infinita, sua resolução será idêntica a da viga semi-infinita inicial.

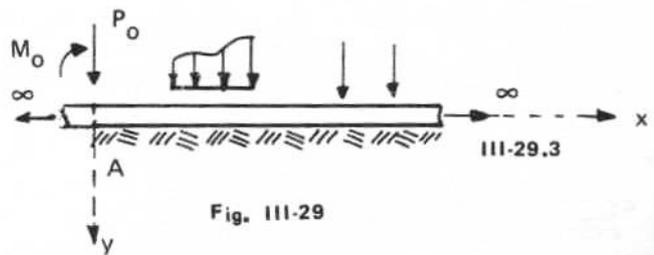
Isto pode facilmente ser conseguido aplicando-se à viga infinita, em  $A^{esq}$ , uma carga vertical  $P_0$  e um momento  $M_0$  tais que promovam o aparecimento, em

A, de um momento fletor ( $-M_A$ ) e de um esforço cortante ( $-Q_A$ ) que tornem inativa a parte da viga infinita à esquerda de A.

Desta forma,

$$\begin{cases} \frac{P_0}{4\beta} \psi(\beta x) + \frac{M_0}{2} \theta(\beta x) = -M_A \\ \frac{-P_0}{2} \theta(\beta x) - \frac{M_0 \beta}{2} \varphi(\beta x) = -Q_A \end{cases}$$

(com  $\beta x = 0$ )

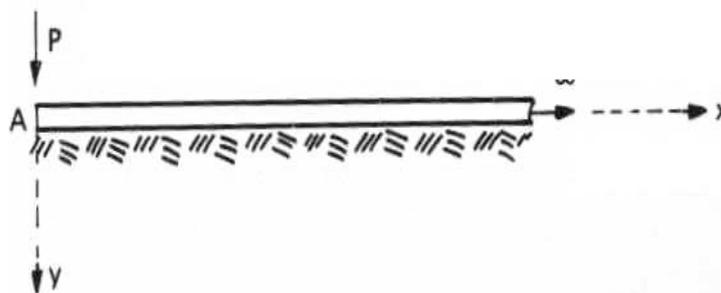


Obtendo-se então,

$$\begin{cases} P_0 = 4(\beta M_A + Q_A) \\ M_0 = -\frac{2}{\beta}(2\beta M_A + Q_A) \end{cases}$$

Assim, a resolução da viga semi-infinita será a resolução da viga infinita submetida ao carregamento da semi-infinita, acrescido das cargas  $P_0$  e  $M_0$  definidas acima, atuantes em  $A^{\text{esq}}$ .

**Exemplo 5.3** – Resolver a viga semi-infinita abaixo:

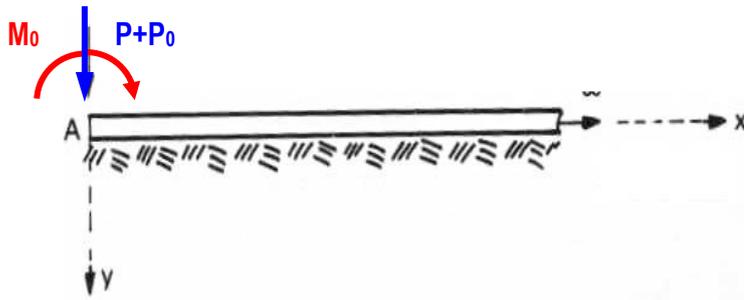


**Solução:**

$$M_A = \frac{P}{4\beta} \psi(\beta x) = \frac{P}{4\beta} \Rightarrow \beta x = 0$$

$$Q_A = \frac{P}{2} \theta(\beta x) = \frac{P}{2}$$

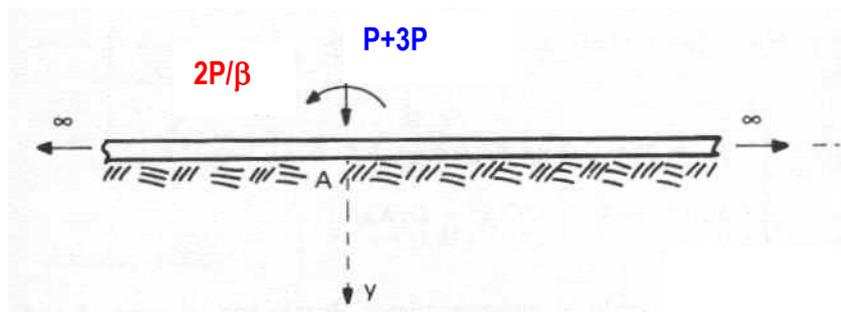
A fim de evitar problemas com condições de contorno, supõe-se  $P$  aplicado em  $A_{\text{DIR}}$ , para determinação de  $P_0$  e  $M_0$ .



Substituindo-se nas equações (33) e (34)

$$P_0 = 4 \left( \beta \frac{P}{4\beta} + \frac{P}{2} \right) \Rightarrow \boxed{P_0 = 3P}$$

$$Q_A = -\frac{2}{\beta} \left( 2\beta \frac{P}{4\beta} + \frac{P}{2} \right) \Rightarrow M_0 = -\frac{P}{\beta} - \frac{P}{\beta} \Rightarrow \boxed{M_0 = -\frac{2P}{\beta}}$$



Logo

$$y = \frac{4P\beta}{2k} \varphi(\beta x) - \frac{2P}{\beta} \frac{\beta^2}{k} \xi(\beta x)$$

$$y = \frac{2P\beta}{k} \varphi(\beta x) - \frac{2P\beta}{k} \xi(\beta x) = \frac{2P\beta}{k} \theta(\beta x)$$

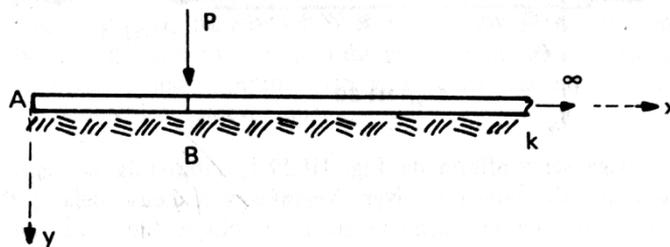
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4P\beta^2}{k} \xi(\beta x) - \frac{2P}{\beta} \frac{\beta^3}{k} \psi(\beta x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2P\beta^2}{k} \varphi(\beta x)$$

$$M = \frac{4P}{4\beta} \psi(\beta x) - \frac{2P}{\beta} \frac{1}{2} \theta(\beta x) = -\frac{P}{\beta} \xi(\beta x)$$

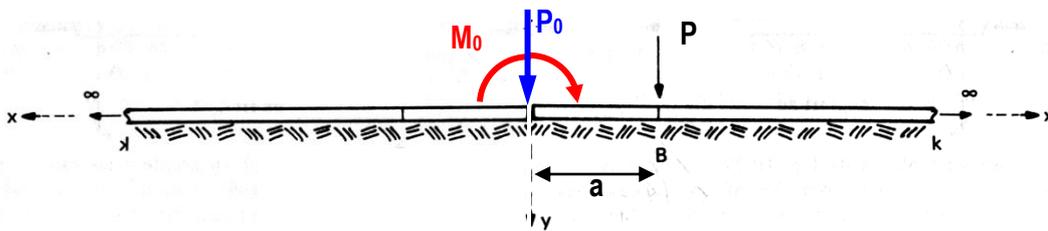
$$Q = -\frac{4P}{2} \theta(\beta x) + \frac{2P}{\beta} \frac{\beta}{2} \varphi(\beta x) = -P \psi(\beta x)$$

**Exemplo 5.4** – Para a viga semi-infinita abaixo, submetida ao carregamento indicado, obter o momento fletor sob o ponto de aplicação da carga  $P$ .



**Solução:**

O momento fletor pedido pode ser obtido a partir da viga infinita abaixo onde  $P_0$  e  $M_0$  podem ser obtidos através das equações (33) e (34)



$$M_A = \frac{P}{4\beta} \psi(\beta a) \quad \text{e} \quad Q_A = \frac{P}{2} \theta(\beta a)$$

$$P_0 = 4 \left[ \beta \frac{P}{4\beta} \psi(\beta a) + \frac{P}{2} \theta(\beta a) \right] = P \psi(\beta a) + 2P \theta(\beta a)$$

$$\boxed{P_0 = P[\psi(\beta a) + 2\theta(\beta a)]}$$

$$M_0 = -\frac{2}{\beta} \left[ 2\beta \frac{P}{4\beta} \psi(\beta a) + \frac{P}{2} \theta(\beta a) \right] = -\frac{P}{\beta} \psi(\beta a) + \frac{P}{\beta} \theta(\beta a)$$

$$\boxed{M_0 = -\frac{P}{\beta} [\psi(\beta a) + \theta(\beta a)]}$$

Logo, o momento atuante sob a carga  $P$ , aplicando-se o princípio da superposição dos efeitos será,

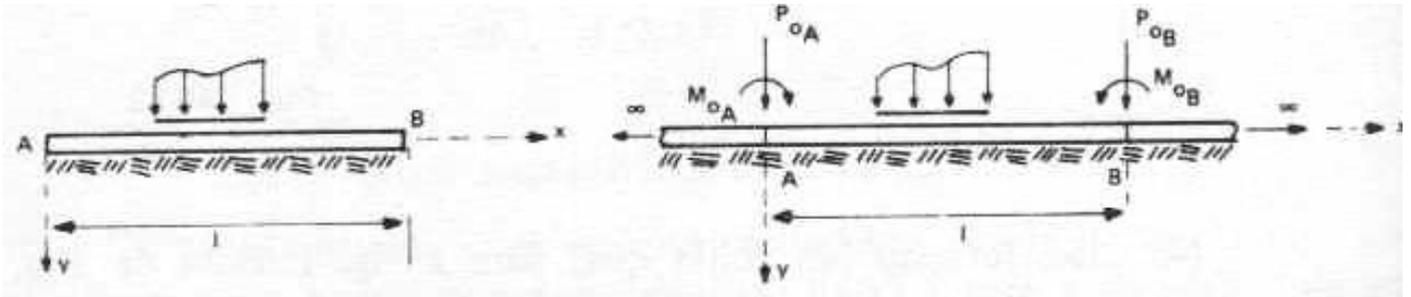
$$M_B = \frac{P}{4\beta} \psi(0) + \frac{P}{4\beta} [\psi(\beta a) + 2\theta(\beta a)] \psi(\beta a) - \frac{P}{2\beta} [\psi(\beta a) + \theta(\beta a)] + \theta(\beta a)$$

$$\boxed{M_B = \frac{P}{4\beta} [1 + \psi^2(\beta a) - 2\theta^2(\beta a)]}$$



### 5.3. Vigas Finitas

#### 5.3.1. Caso de bordos livres

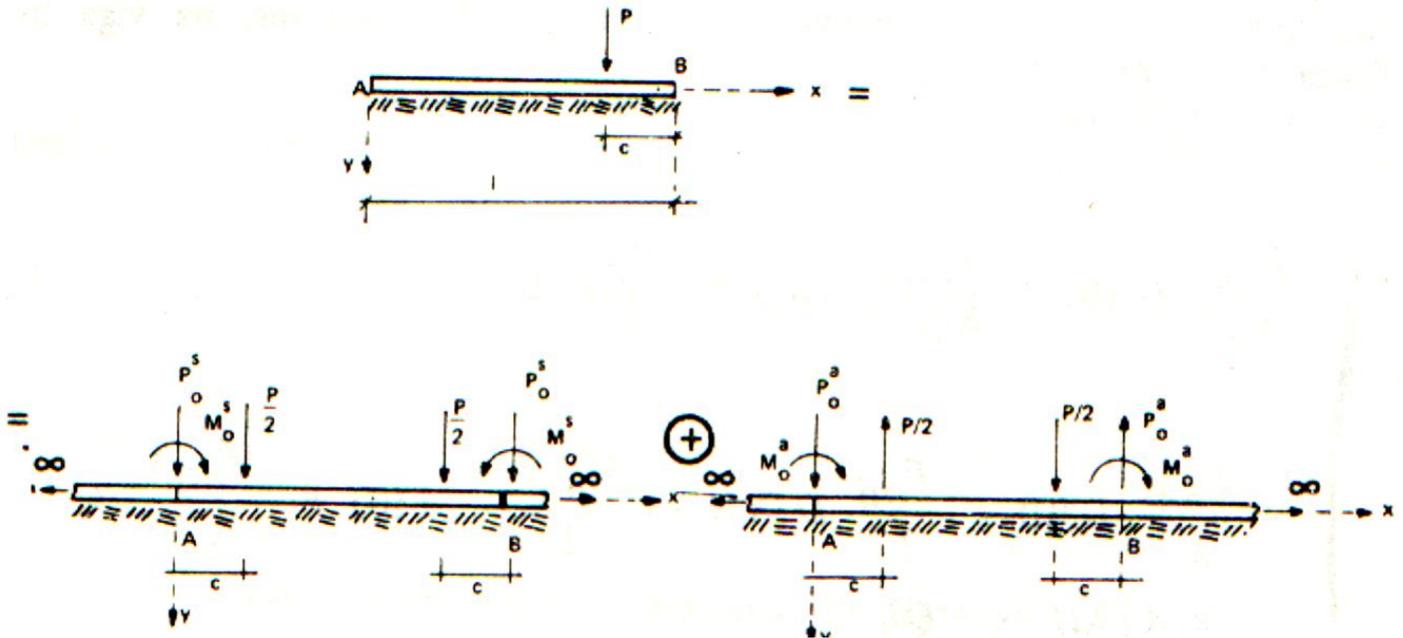


As cargas  $M_{0A}$ ,  $P_{0A}$ ,  $M_{0B}$  e  $P_{0B}$  são aplicadas em  $A^{\text{esq}}$  e  $B^{\text{dir}}$  respectivamente. As partes à esquerda de A e à direita de B das vigas infinitas ficam inertes.

Sendo então  $Q_A$ ,  $M_A$ ,  $Q_B$  e  $M_B$  os esforços cortantes e momentos fletores atuantes, na viga infinita, nas seções A e B, devidos ao mesmo carregamento que o aplicado na viga finita, as cargas  $P_{0A}$ ,  $M_{0A}$ ,  $P_{0B}$  e  $M_{0B}$  devem satisfazer às condições:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P_{0A}}{4\beta} \psi(0) + \frac{P_{0B}}{4\beta} \psi(\beta l) + \frac{M_{0A}}{2} \theta(0) + \frac{M_{0B}}{2} \theta(\beta l) = -M_A \\ -\frac{P_{0A}}{2} \theta(0) + \frac{P_{0B}}{2} \theta(\beta l) - \frac{\beta M_{0A}}{2} \varphi(0) + \frac{\beta M_{0B}}{2} \varphi(\beta l) = -Q_A \\ \frac{P_{0A}}{4\beta} \psi(\beta l) + \frac{P_{0B}}{4\beta} \psi(0) + \frac{M_{0A}}{2} \theta(\beta l) + \frac{M_{0B}}{2} \theta(0) = -M_B \\ -\frac{P_{0A}}{2} \theta(\beta l) + \frac{P_{0B}}{2} \theta(0) - \frac{\beta M_{0A}}{2} \varphi(\beta l) + \frac{\beta M_{0B}}{2} \varphi(0) = -Q_B \end{array} \right.$$

Hetényi propôs um artifício de combinação de cargas transformando o sistema de 4 equações com 4 incógnitas em 2 sistemas independentes de 2 equações e 2 incógnitas.



a) Caso simétrico ( $M=Q=0$  em A e B e  $M_A^S$  e  $Q_A^S$ )

$$\begin{cases} \frac{P_0^S}{4\beta} [\psi(0) + \psi(\beta l)] + \frac{M_0^S}{2} [\theta(0) + \theta(\beta l)] = -M_A^S \\ -\frac{P_0^S}{2} [\theta(0) - \theta(\beta l)] - \frac{\beta M_0^S}{2} [\varphi(0) - \varphi(\beta l)] = -Q_A^S \end{cases}$$

**Solução:**

$$\begin{aligned} P_0^S &= 4Es(\beta l) \{ Q_A^S [1 + \theta(\beta l)] + \beta M_A^S [1 - \varphi(\beta l)] \} \\ M_0^S &= -\frac{2}{\beta} Es(\beta l) \{ Q_A^S [1 + \psi(\beta l)] + 2\beta M_A^S [1 - \theta(\beta l)] \} \end{aligned}$$

Onde

$$E_s(\beta l) = \frac{1}{2[1 + \theta(\beta l)][1 - \theta(\beta l)] - [1 - \varphi(\beta l)] - [1 + \psi(\beta l)]}$$

$$E_s(\beta l) = \frac{e^{\beta l}}{2(\text{sen}R\beta l + \text{sen}\beta l)}$$

b) Caso anti-simétrico

$$P_0^a = 4Ea(\beta\ell)\{Q_A^a[1-\theta(\beta\ell)] + \beta M_A^a[1+\varphi(\beta\ell)]\}$$

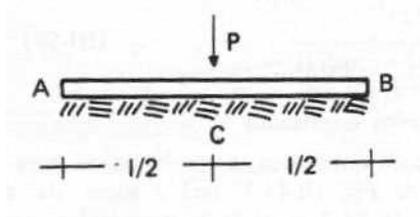
$$M_0^a = -\frac{2}{\beta}Ea(\beta\ell)\{Q_A^a[1-\psi(\beta\ell)] + 2\beta M_A^a[1+\theta(\beta\ell)]\}$$

Onde

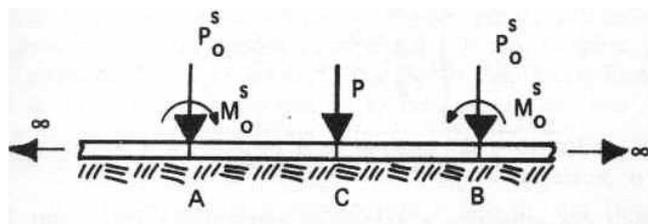
$$Ea(\beta\ell) = \frac{1}{2[1+\theta(\beta\ell)][1-\theta(\beta\ell)] - [1+\varphi(\beta\ell)][1-\psi(\beta\ell)]}$$

$$Ea(\beta\ell) = \frac{e^{\beta\ell}}{2(\sinh \beta\ell - \sin \beta\ell)}$$

**Exemplo 5.4** – Calcular o deslocamento vertical e o momento fletor sob a carga  $P$  para a viga finita de bordos livres com  $\beta\ell = 1$ .



**Solução:**



Como o carregamento é simétrico, deve-se utilizar apenas as equações da parte simétrica obtidas anteriormente.

$$Q_A^S = \frac{P}{2} \theta\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) \quad \text{e} \quad M_A^S = \frac{P}{4\beta} \psi\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) \quad \text{dados por:}$$

$$P_0^S = 4Es(\beta\ell) \left\{ \frac{P}{2} \theta\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) [1 + \theta(\beta\ell)] + \frac{P}{4} \psi\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) [1 - \phi(\beta\ell)] \right\}$$

$$M_0^S = -\frac{2}{\lambda} Es(\beta\ell) \left\{ \frac{P}{2} \theta\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) [1 + \psi(\beta\ell)] + \frac{P}{2} \psi\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) [1 - \theta(\beta\ell)] \right\}$$

$$\text{como } \beta\ell = 1, \quad \begin{aligned} P_0^S &= 0,94P \\ M_0^S &= -0,45P\ell \end{aligned}$$

Empregando-se o princípio da superposição dos efeitos, tem-se:

$$y_c = \frac{P\beta}{2K} \phi(0) + 2 \frac{P_0^S \beta}{2k} \phi\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) + 2 \frac{M_0^S \beta^2}{k} \xi\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)$$

$$M_c = \frac{P}{4\beta} \psi(0) + 2 \frac{P_0^S}{4\beta} \psi\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) + 2 \frac{M_0^S}{2} \theta\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)$$

como  $\beta\ell = 1$

$$y_c = 1,01 \frac{P\beta}{k} = 1,01 \frac{P\beta}{4EJ\beta^4} \Rightarrow y_c = 0,25 \frac{P\ell^3}{EJ}$$

$$M_c = 0,13P\ell$$