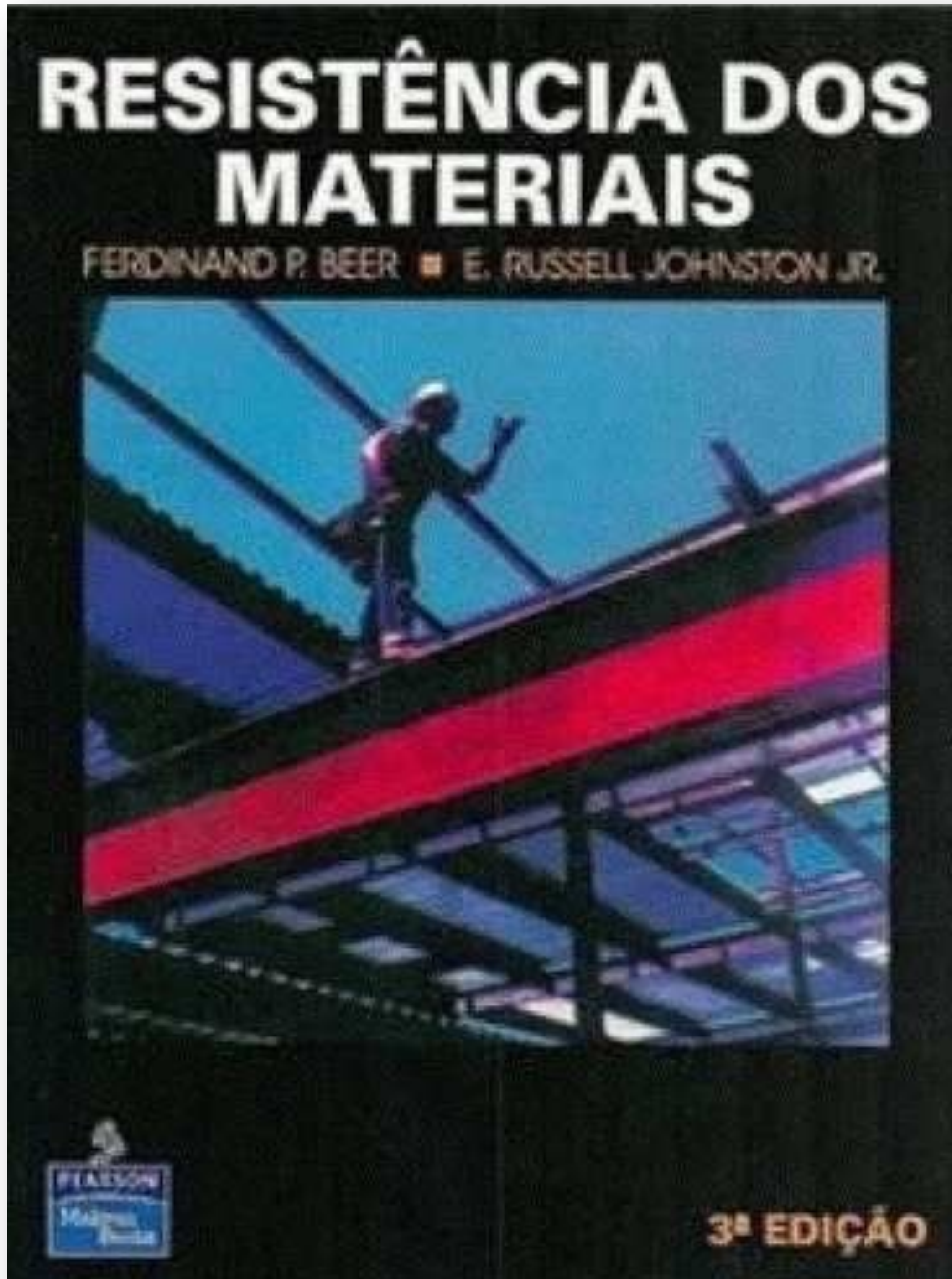
Capítulo 3

Flexão de Peças Curvas

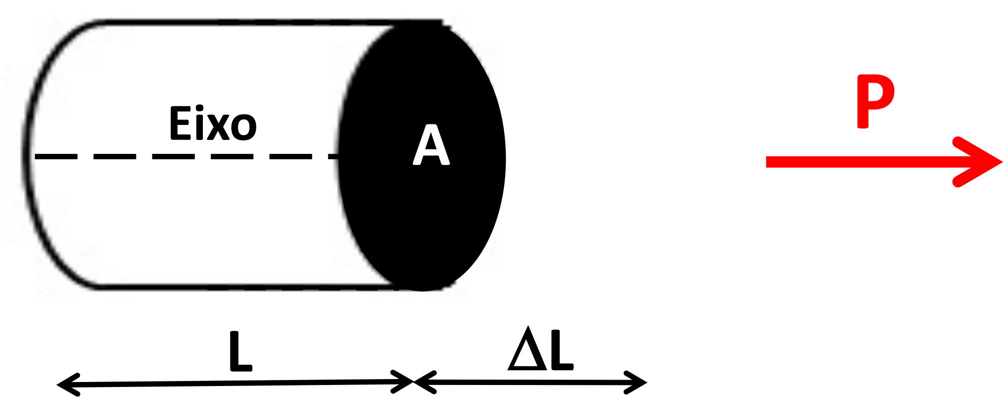
Professores Luciano Lima e André Tenchini

Bibliografia



Introdução

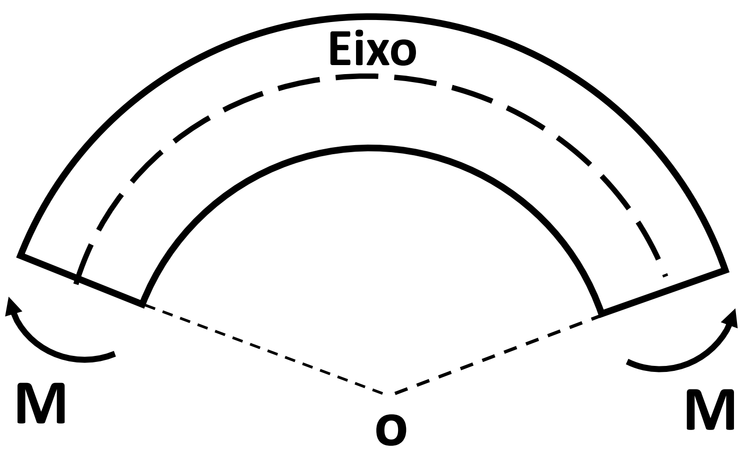
- A distribuição de tensões foram definidas e aplicadas em elementos retos onde a deformação é linearmente proporcional a variação do eixo neutro



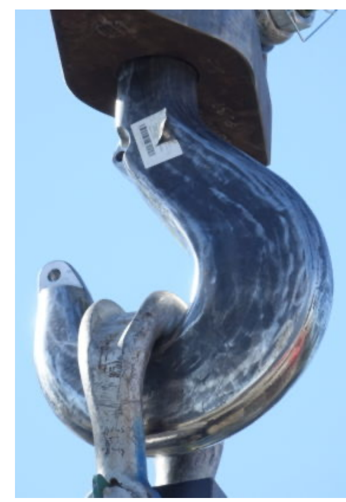
$$\sigma = E \times \frac{\Delta L}{L}$$

Até agora!!!!!

- Porém, esta hipótese não é mais verdadeira quando o **eixo da viga é curvo**



A distribuição de tensões para um elemento curvo deve ser definida através de uma outra hipótese



Fonte: http://cranebrasil.com.br/primeiro-gancho-fabricado-com-impressao-3d/

Introdução

- Hipóteses adotadas:

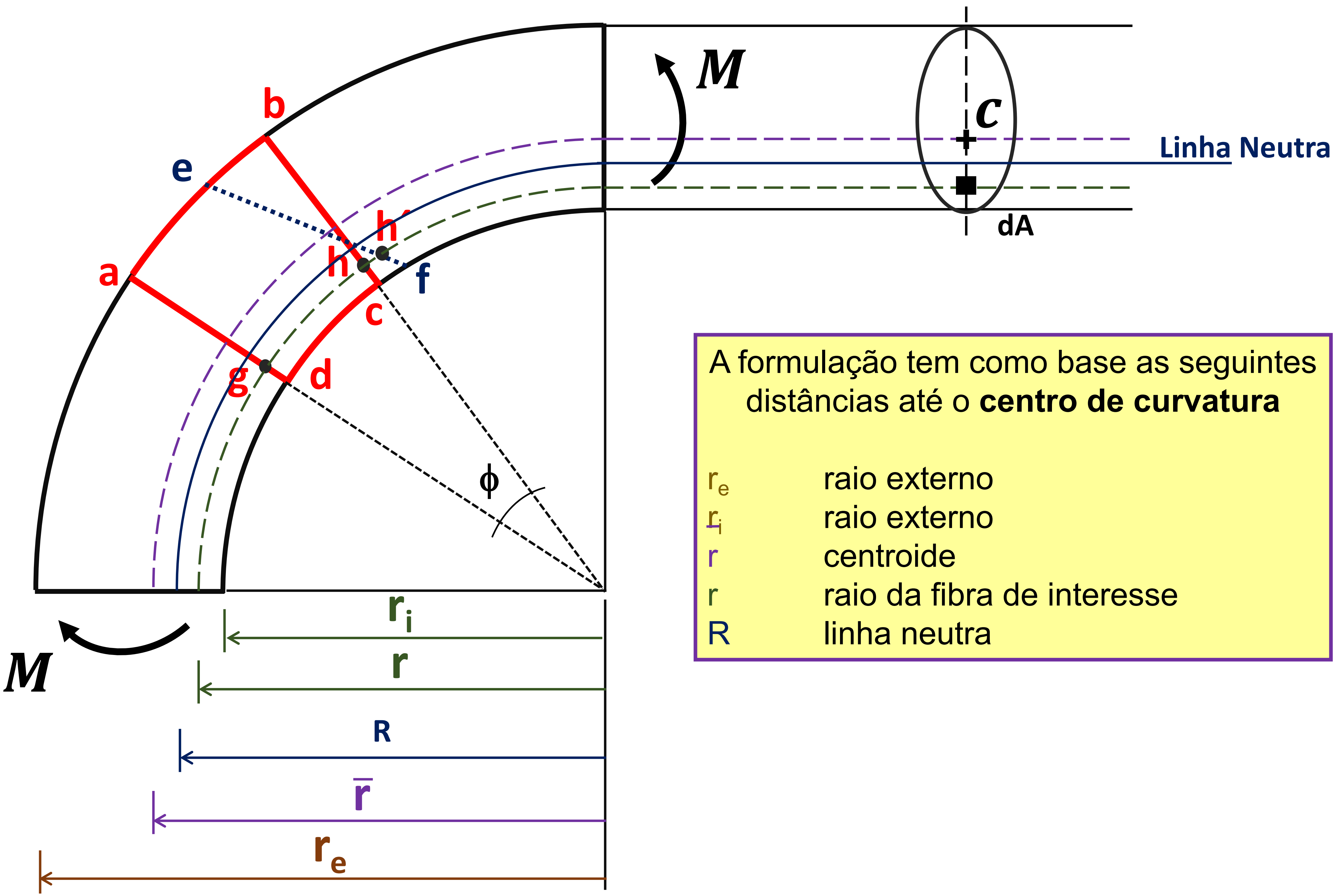
  i. Linha dos centros – curvas planas;

  ii. Seção com pelo menos um eixo de simetria;

  iii. O plano que contém o eixo da barra é o plano de solicitação;

  iv. Esforços considerados – **Normal (N)** + **Momento Fletor (M)**.

Flexão pura

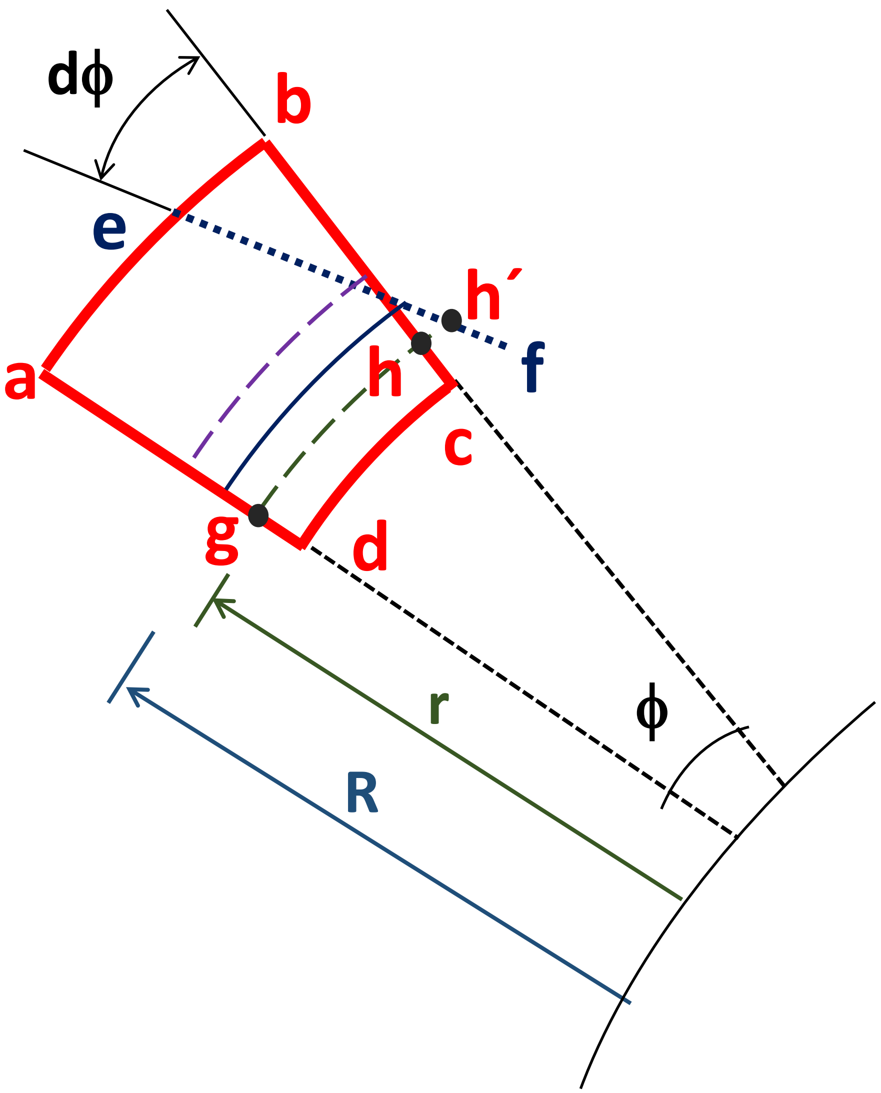


A formulação tem como base as seguintes distâncias até o **centro de curvatura**

r_e raio externo
r_i raio externo
$\bar{r}$ centroide
r raio da fibra de interesse
R linha neutra

Flexão pura

Determinação da distribuição de tensões e deformações



- Seção **bc** ficará na posição **ef**, após a deformação, sofrendo um giro de **dϕ**

- Seja um fibra genérica **gh** compreendida entre duas seções que formam um **ângulo ϕ**

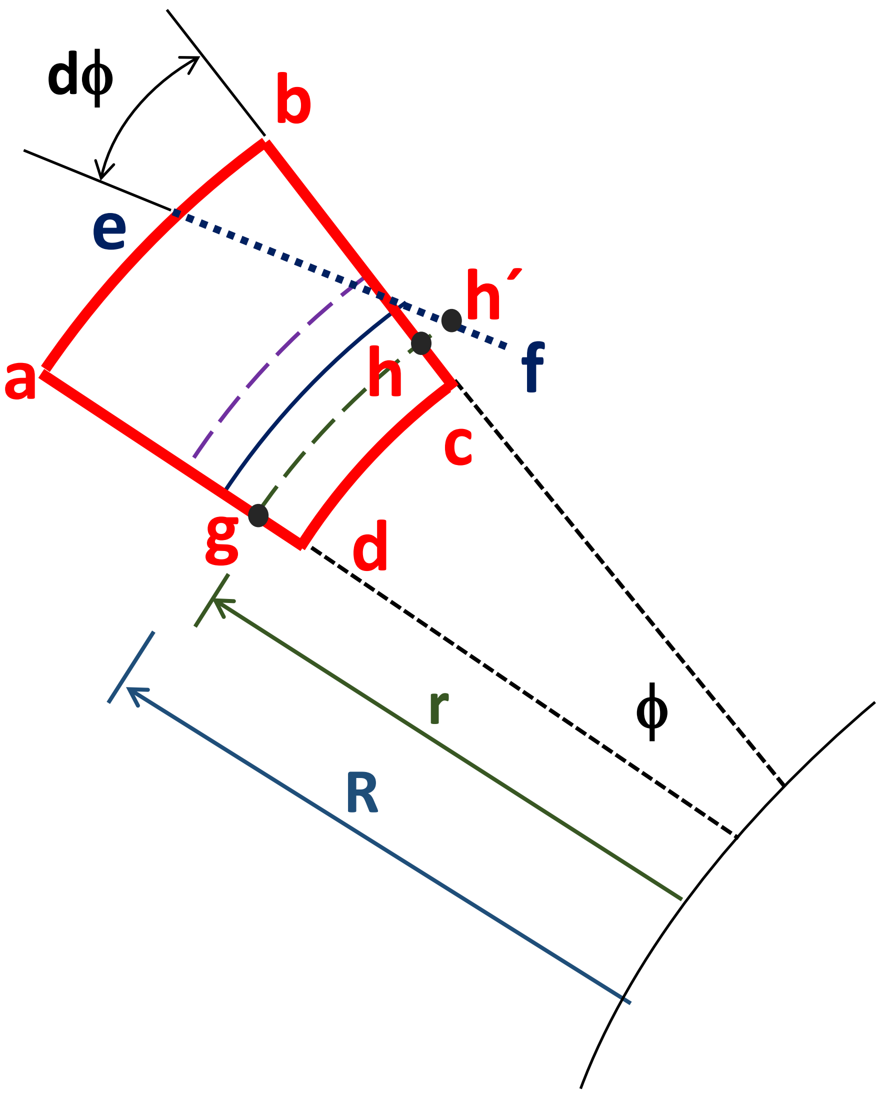
$$\varepsilon = \frac{hh'}{gh} \quad \textbf{ou} \quad \varepsilon = \frac{(R-r)d\emptyset}{r\emptyset}$$

- Como $\sigma = E \times \varepsilon$, tem-se:

$$\boxed{\sigma = E\,\frac{(R-r)d\emptyset}{r\emptyset}} \Rightarrow \boxed{\frac{\sigma r}{(R-r)} = E\,\frac{d\emptyset}{\emptyset}}$$

Flexão pura

Determinação da distribuição de tensões e deformações



- Posição da linha neutra: $\sum F_n = 0$

$$\int_A \sigma dA = 0 \;\rightarrow\; \int_A \frac{E(R-r)d\emptyset}{r\emptyset} dA = 0$$

Termos constantes: **E, R, ϕ, d ϕ**

$$R\int_A \frac{dA}{r} - \int_A dA = 0 \;\rightarrow\; \boxed{R = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}}}$$

A posição da linha neutra não passa pelo centróide

Relembrando: $\frac{\sigma_{max}}{R}\int_A rdA = 0$

Momento de primeira ordem da seção transversal deve ser zero. Então, o eixo neutro deve ser o mesmo do centroide

Flexão pura

Determinação da distribuição de tensões e deformações

$$\boxed{\sigma = E\frac{(R-r)d\emptyset}{r\emptyset}}$$

- Momento Fletor resistente da seção transversal: $M = \int_A \underbrace{\sigma dA}_{\text{Força}} \times \underbrace{(R-r)}_{\text{Braço de alavanca}}$

$R^2 - 2Rr + r^2$

$$M = \int_A \frac{E(R-r)^2}{r\emptyset} d\emptyset\, dA = \frac{Ed\emptyset}{\emptyset}\int_A \frac{(R-r)^2}{r} dA$$

$$M = \frac{\sigma r}{(R-r)}\left[\int_A \frac{R^2}{r} dA - \int_A \frac{2R\cancel{r}}{\cancel{r}} dA + \int_A \frac{r^{\cancel{2}}}{\cancel{r}} dA\right]$$

$$M = \frac{\sigma r}{(R-r)}\left[R\int_A \frac{R}{r} dA - R\int_A dA - R\int_A dA + \int_A r\, dA\right]$$

Flexão pura

Determinação da distribuição de tensões e deformações

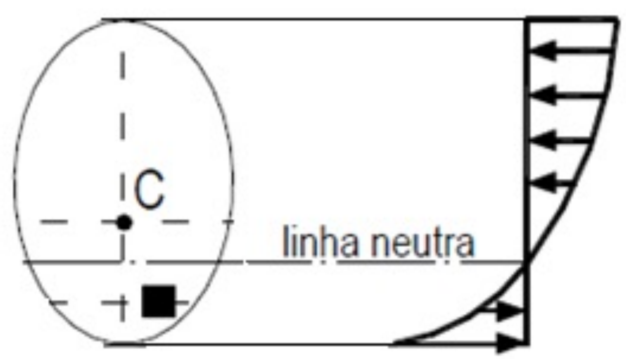
- Momento Fletor resistente da seção transversal: $M = \int_A \underbrace{\sigma dA}_{\text{Força}} \times \underbrace{(R - r)}_{\text{Braço de alavanca}}$

$$M = \frac{\sigma r}{(R - r)} \left\{ R \cancelto{A - A = 0}{\left[R \int_A \frac{1}{r} dA - \int_A dA \right]} - \overbrace{R \int_A dA}^{R.A} + \overbrace{\int_A r\, dA}^{\bar{r}.A} \right\}$$

$$M = \frac{\sigma r}{(R - r)} [\bar{r}A - RA] = \frac{\sigma r A}{(R - r)} (\bar{r} - R)$$

$$\boxed{\sigma = \frac{M(R - r)}{Ar(\bar{r} - R)}}$$

Eq. das Tensões $\longrightarrow$ **HIPÉRBOLE**



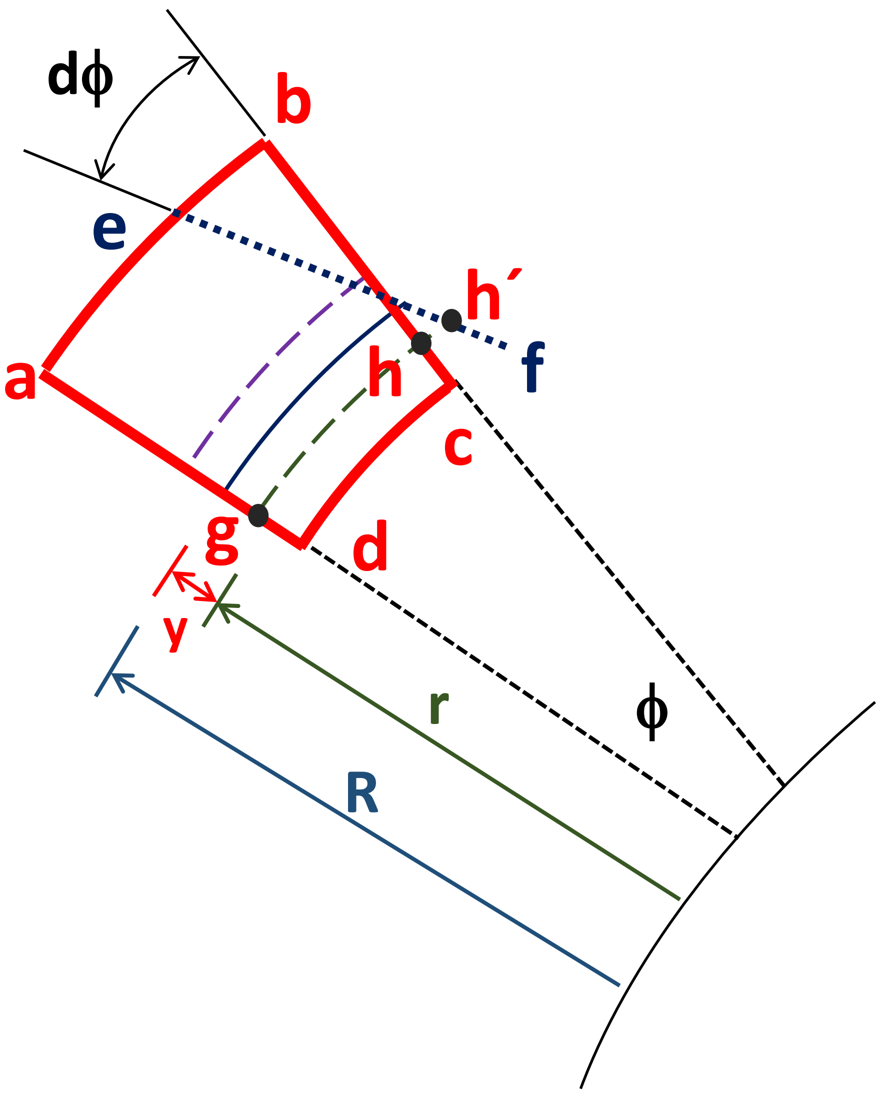
M+ >> tende a transformar a viga curva em viga reta

M- >> tende a deixar a viga mais curva

Flexão pura

$$\sigma = \frac{M(R-r)}{Ar(\bar{r}-R)}$$

Determinação da distribuição de tensões e deformações



- A equação das tensões pode ser escrita com base no parâmetro **y** (positivo no sentido da curvatura):

$$R - r = y \quad \rightarrow \quad r = R - y$$

- E como temos a excentricidade entre o eixo neutro e o centroide da peça:

$$e = \bar{r} - R$$

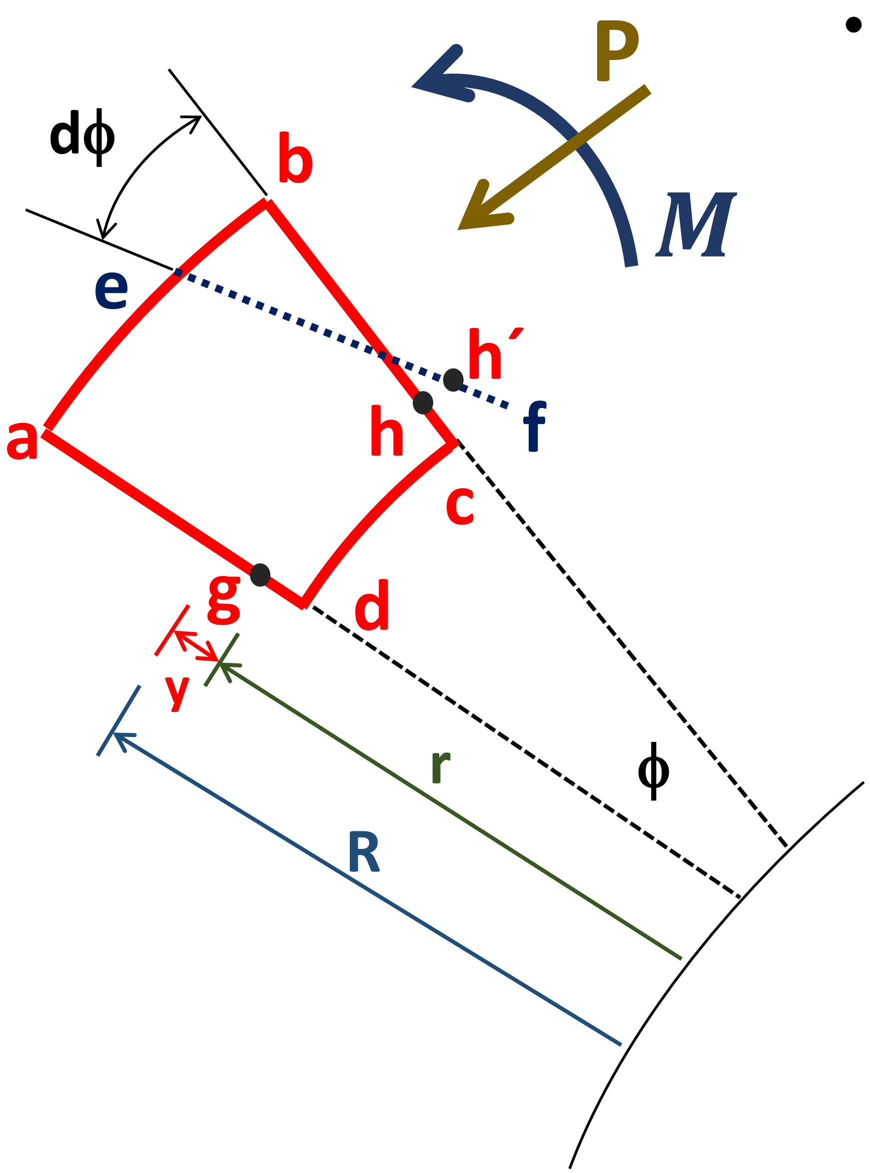
Assim, tem-se:

$$\boxed{\sigma = \frac{M(R-r)}{Ar(\bar{r}-R)}} \rightarrow \boxed{\sigma = \frac{My}{Ae(R-y)}}$$

Relembrando: $\boldsymbol{\sigma = \frac{My}{I}}$ **Vigas Retas**

Flexão composta

Determinação da distribuição de tensões e deformações

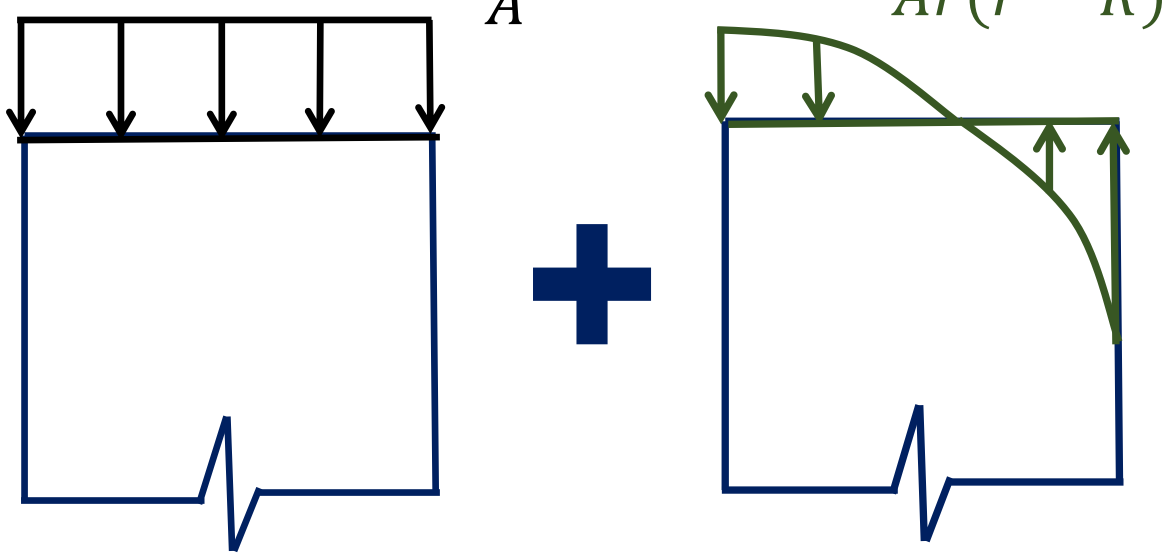


- Para o caso de a seção estar submetida a esforços de **flexão e esforços normais**, a tensão normal será obtida pela superposição dos efeitos

$$\boxed{\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M(R-r)}{Ar(\bar{r}-R)}}$$

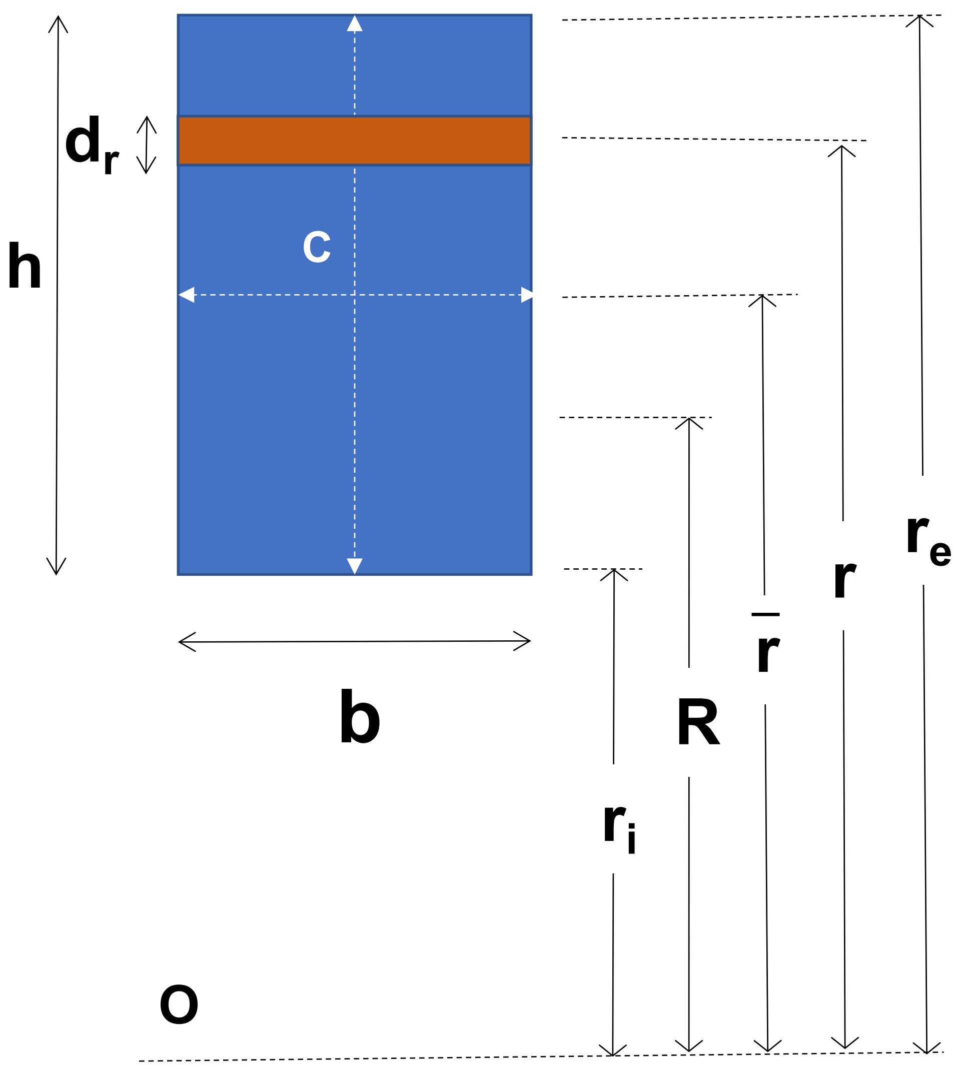
$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\sigma = \frac{M(R-r)}{Ar(\bar{r}-R)}$$



Flexão pura e composta

Cálculo da linha neutra – seção retangular



- Lembrando da equação da linha neutra de vigas curvas:

$$\boxed{R = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}}}$$

onde, A = b . h

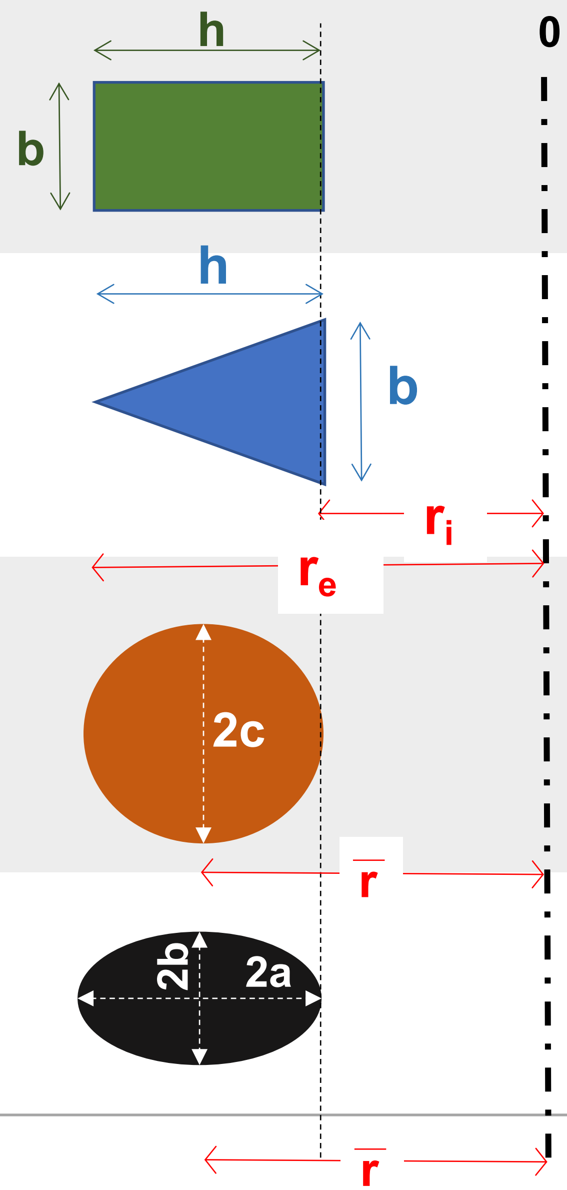
Assim, $\displaystyle \int_A \frac{dA}{r} = \int_{r_i}^{r_e} \frac{b.dr}{r} = b\int_{r_i}^{r_e} \frac{dr}{r} = bln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$

- Retornando com os termos

$$\boxed{R = \frac{bh}{bln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)} \rightarrow \quad R = \frac{h}{ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}}$$

Flexão pura e composta

Cálculo da linha neutra – várias seções transversais



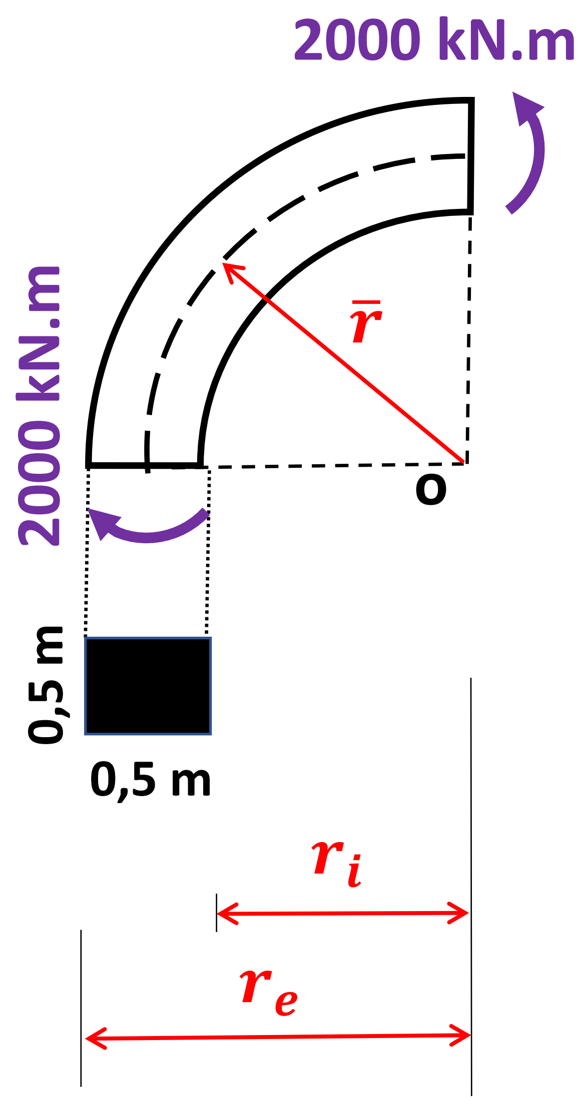
SEÇÃO TRANSVERSAL	ÁREA	$\int_A \frac{1}{r} dA$
	$b(r_e - r_i)$	$b\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$
	$\frac{b}{2}(r_e - r_i)$	$\frac{br_e}{(r_e - r_i)}\left[\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)\right] - b$
	πc^2	$2\pi\left(\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - c^2}\right)$
	πab	$\frac{2\pi b}{a}\left(\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - a^2}\right)$

Exemplos – Viga Curva

Exemplo 3.1

Comparar as tensões na viga de seção retangular de (0,50 x 0,50)m submetida a um momento fletor de 2000 kN.m para os seguintes casos:

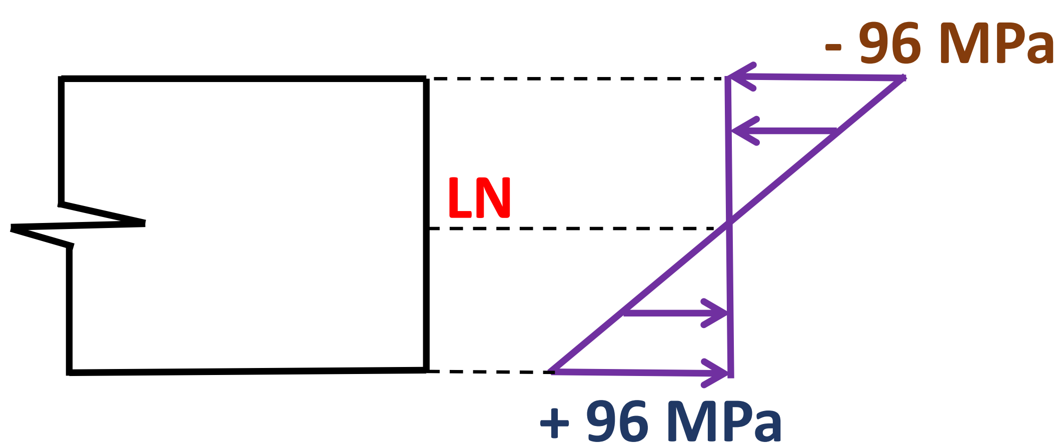
a) Viga Reta **b)** Viga curva com raio de curvatura de 2,5 m **c)** Viga curva com $\bar{r} = 0{,}75m$



a) Viga Reta

$$\boxed{\sigma = \frac{My}{I}}$$

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{2000x10^6 \times \left(^{500}/_{2}\right)}{^{500^4}/_{12}} \frac{Nmm \times mm}{mm^4} = \boxed{96\ MPa}$$

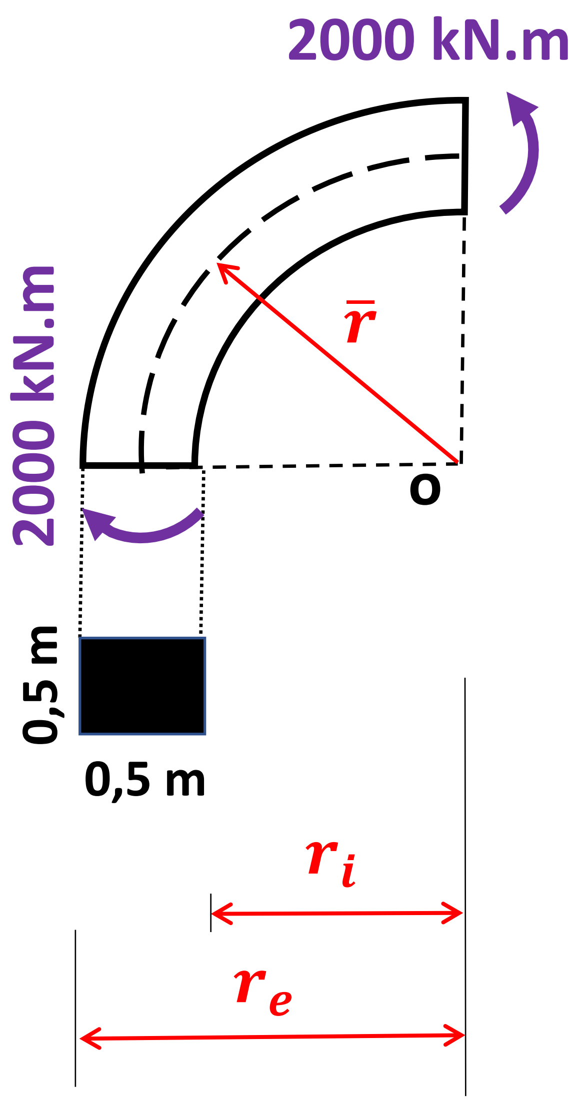


Exemplos – Viga Curva

Exemplo 3.1

Comparar as tensões na viga de seção retangular de (0,50 x 0,50)m submetida a um momento fletor de 2000 kN.m para os seguintes casos:

a) Viga Reta **b)** Viga curva com raio de curvatura de 2,5 m **c)** Viga curva com $\bar{r} = 0{,}75m$



b) Viga curva com raio de curvatura de 2,5 m

$$\boxed{\sigma = \frac{M(R-r)}{Ar(\bar{r}-R)}}$$

$$r_i = \bar{r} - {}^{h}/_{2} = 2500 - {}^{500}/_{2} = 2250mm$$

$$r_e = \bar{r} + {}^{h}/_{2} = 2500 + {}^{500}/_{2} = 2750mm$$

$$R = \frac{A}{\int_A \frac{1}{r}dA} = \frac{500^2}{500ln\left(\frac{2750}{2250}\right)} = 2491{,}\underline{644}mm$$

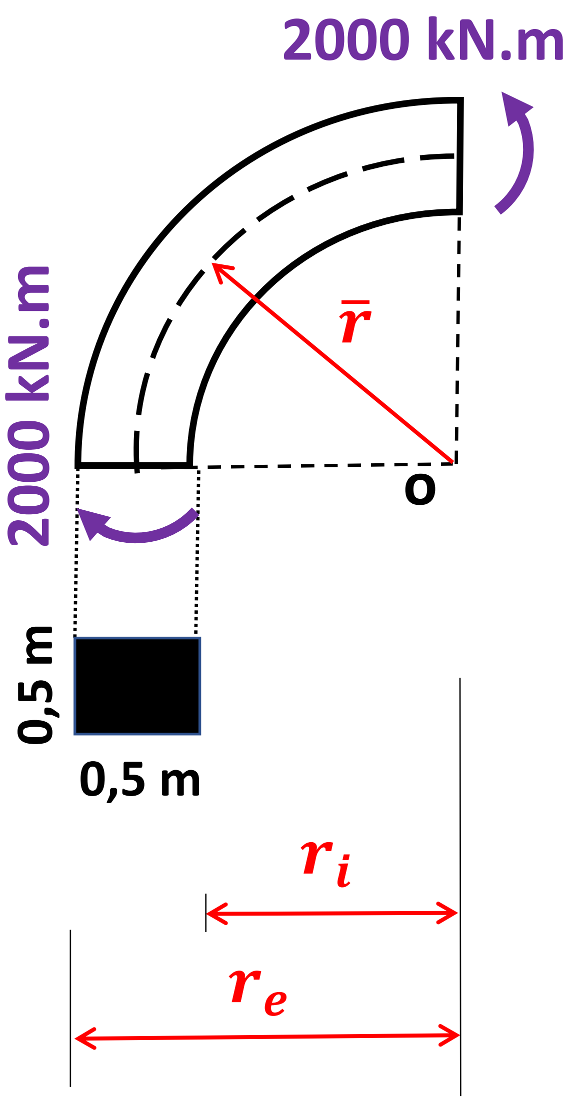
(atenção usar três casas decimais)

Exemplos – Viga Curva

Exemplo 3.1

Comparar as tensões na viga de seção retangular de (0,50 x 0,50)m submetida a um momento fletor de 2000 kN.m para os seguintes casos:

a) Viga Reta **b)** Viga curva com raio de curvatura de 2,5 m **c)** Viga curva com $\bar{r} = 0{,}75m$

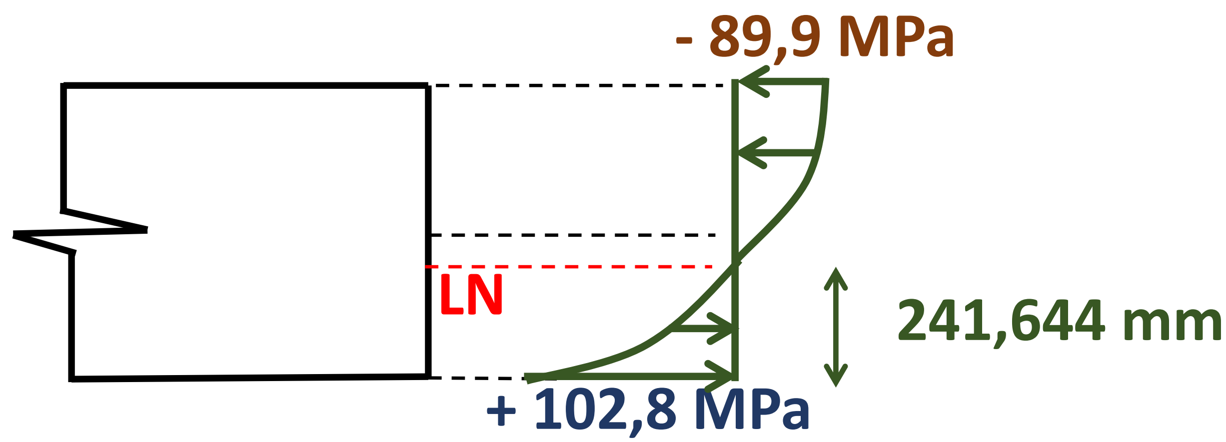


b) Viga curva com raio de curvatura de 2,5 m

$$\boxed{\sigma = \frac{M(R - r)}{Ar(\bar{r} - R)}}$$

$$\sigma = \frac{M(R - r_e)}{Ar_e(\bar{r} - R)} = \frac{2000x10^6(2491{,}644 - 2750)}{500^2.\,2750(2500 - 2491{,}644)} \boxed{= -89{,}9\ MPa}$$

$$\sigma = \frac{M(R - r_i)}{Ar_i(\bar{r} - R)} = \frac{2000x10^6(2491{,}644 - 2250)}{500^2.\,2250(2500 - 2491{,}644)} \boxed{= 102{,}8\ MPa}$$

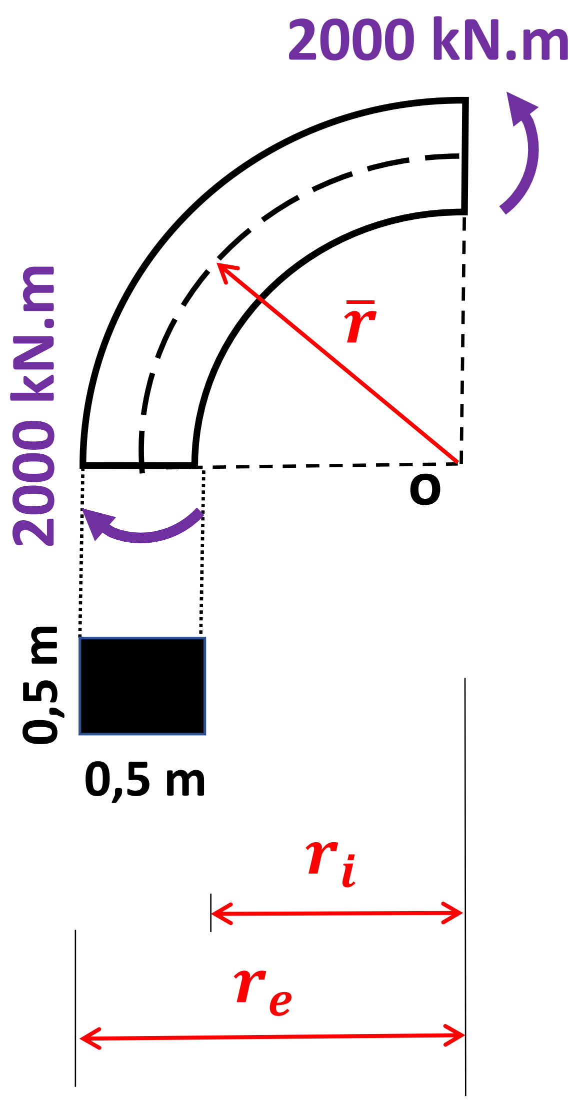


Exemplos – Viga Curva

Exemplo 3.1

Comparar as tensões na viga de seção retangular de (0,50 x 0,50)m submetida a um momento fletor de 2000 kN.m para os seguintes casos:

a) Viga Reta **b)** Viga curva com raio de curvatura de 2,5 m **c)** Viga curva com $\bar{r} = 0{,}75m$



$$\sigma = \frac{M(R - r)}{Ar(\bar{r} - R)}$$

c) Viga curva com $\bar{r} = 0,75m$

$$r_i = \bar{r} - {h}/{2} = 750 - {500}/{2} = 500mm$$

$$r_e = \bar{r} + {h}/{2} = 750 + {500}/{2} = 1000mm$$

$$R = \frac{A}{\int_A \frac{1}{r} dA} = \frac{500^2}{500ln\left(\frac{1000}{500}\right)} = 721{,}348mm$$

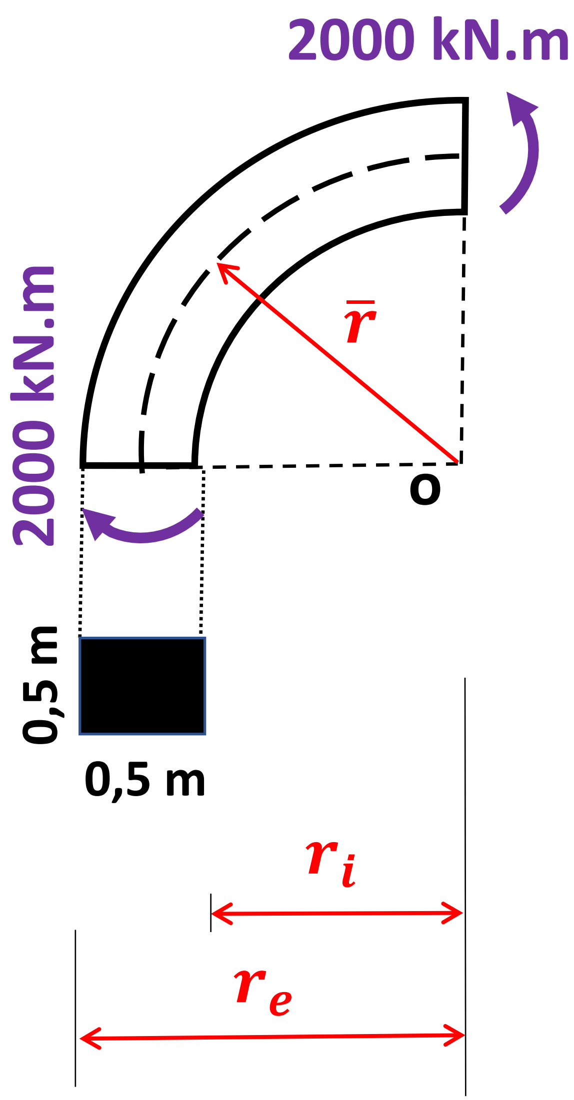
(atenção usar três casas decimais)

Exemplos – Viga Curva

Exemplo 3.1

Comparar as tensões na viga de seção retangular de (0,50 x 0,50)m submetida a um momento fletor de 2000 kN.m para os seguintes casos:

a) Viga Reta **b)** Viga curva com raio de curvatura de 2,5 m **c)** Viga curva com $\bar{r} = 0{,}75m$

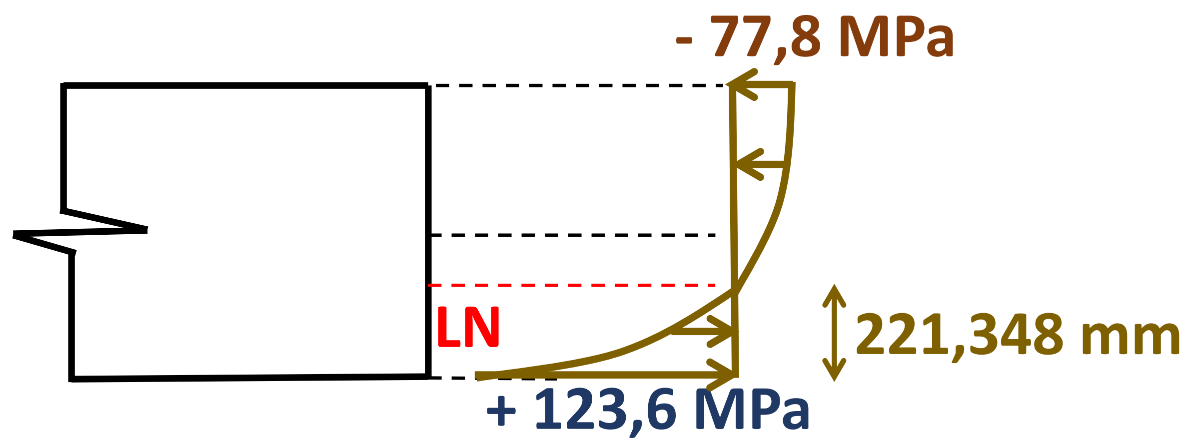


c) Viga curva com $\bar{r} = 0,75m$

$$\sigma = \frac{M(R - r)}{Ar(\bar{r} - R)}$$

$$\sigma = \frac{M(R - r_e)}{Ar_e(\bar{r} - R)} = \frac{2000x10^6(721{,}348 - 1000)}{500^2.1000(750 - 721{,}348)} = -77{,}8\ MPa$$

$$\sigma = \frac{M(R - r_i)}{Ar_i(\bar{r} - R)} = \frac{2000x10^6(721{,}348 - 500)}{500^2.500(750 - 721{,}348)} = 123{,}6\ MPa$$

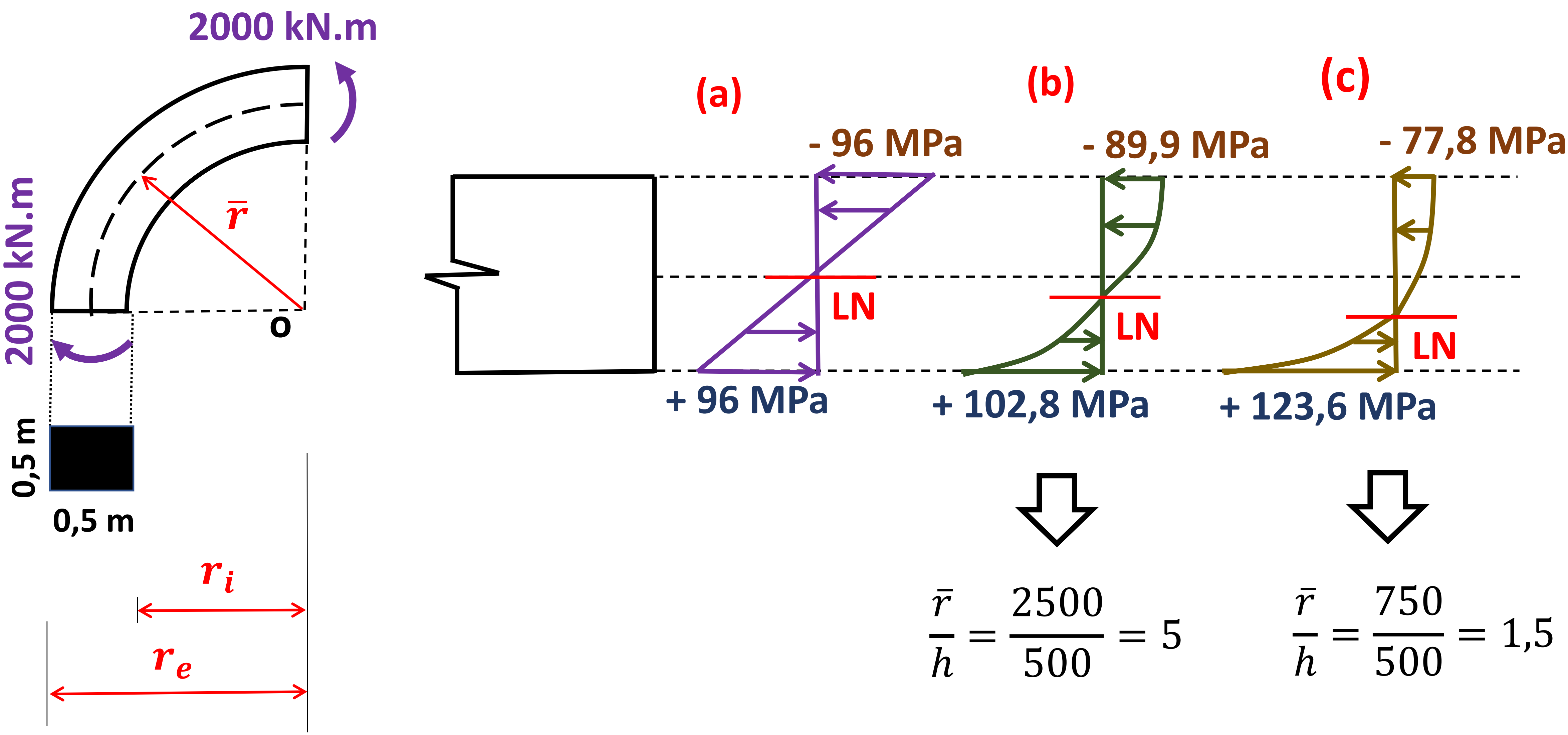


Exemplos – Viga Curva

Exemplo 3.1

Comparar as tensões na viga de seção retangular de (0,50 x 0,50)m submetida a um momento fletor de 2000 kN.m para os seguintes casos:

a) Viga Reta **b)** Viga curva com raio de curvatura de 2,5 m **c)** Viga curva com $\bar{r} = 0{,}75m$



$$\frac{\bar{r}}{h} = \frac{2500}{500} = 5$$

$$\frac{\bar{r}}{h} = \frac{750}{500} = 1{,}5$$

Exemplos – Viga Curva

Influência da relação entre a curvatura e a altura de uma viga curva

(variação em comparação com viga reta)

$\frac{\bar{r}}{h}$	σ_i	σ_e
1	+36,4	-34,8
2	+16,5	-16,5
3	+11,8	-10,9
4	+8,1	-8,4
5	+6,4	-7,0
10	+3,4	-3,2

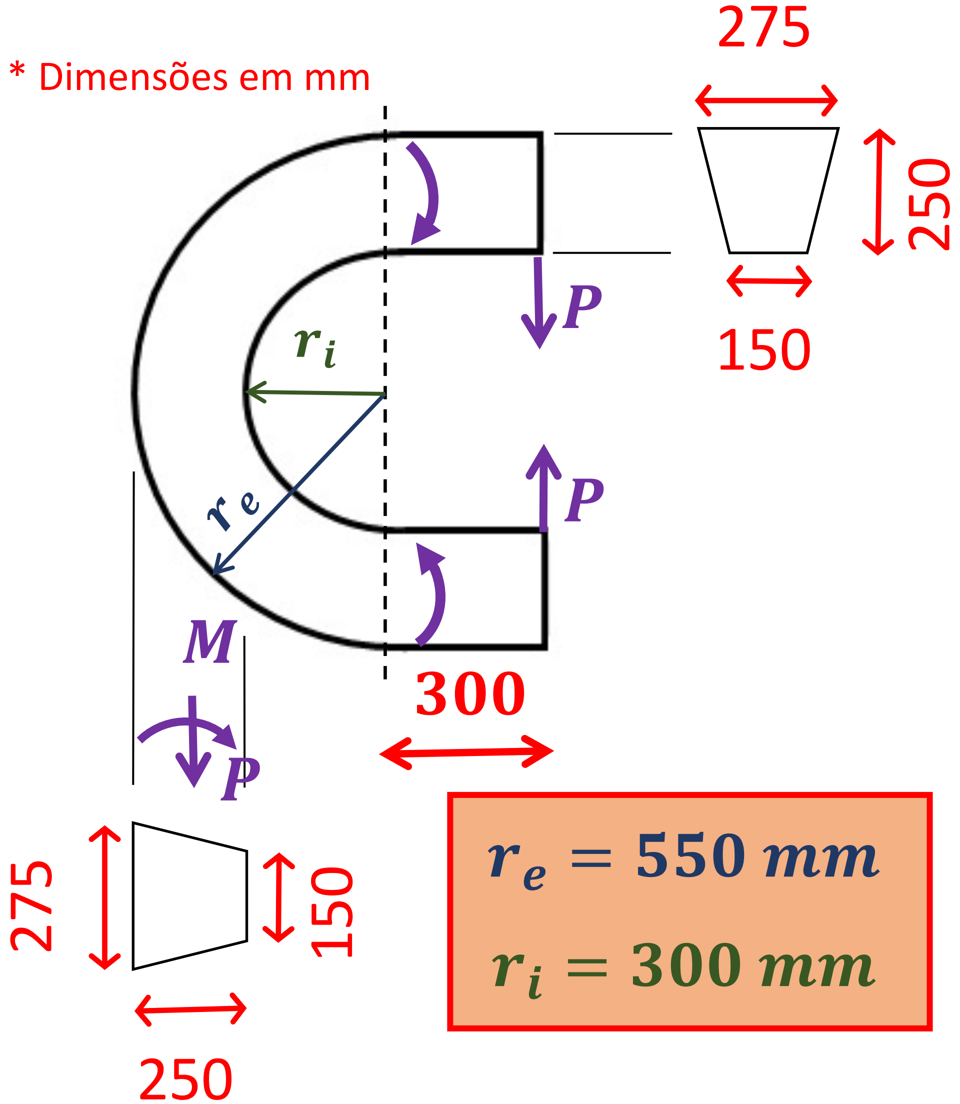
$$\frac{\bar{r}}{h} \geq 10$$

Viga curva pode ser considerada como viga reta desprezando o efeito da curvatura da peça

Exemplos – Viga Curva

Exemplo 3.2

Qual a carga máxima que a peça abaixo resiste sabendo-se que, r_e = 550 mm e r_i = 300 mm, e que o material é frágil com σ_t = 100 MPa e σ_c = 180 MPa?



$$r_e = 550\ mm$$
$$r_i = 300\ mm$$

Para este exercício, a aplicação da carga P irá provar uma combinação (Normal + Momento Fletor) – Flexão Composta

$$M = -P\times(300 + \bar{r})$$

$\bar{r} \rightarrow$ distância até o centróide

$-M \rightarrow$ tende a deixar a peça mais curva

O centroide da peça:

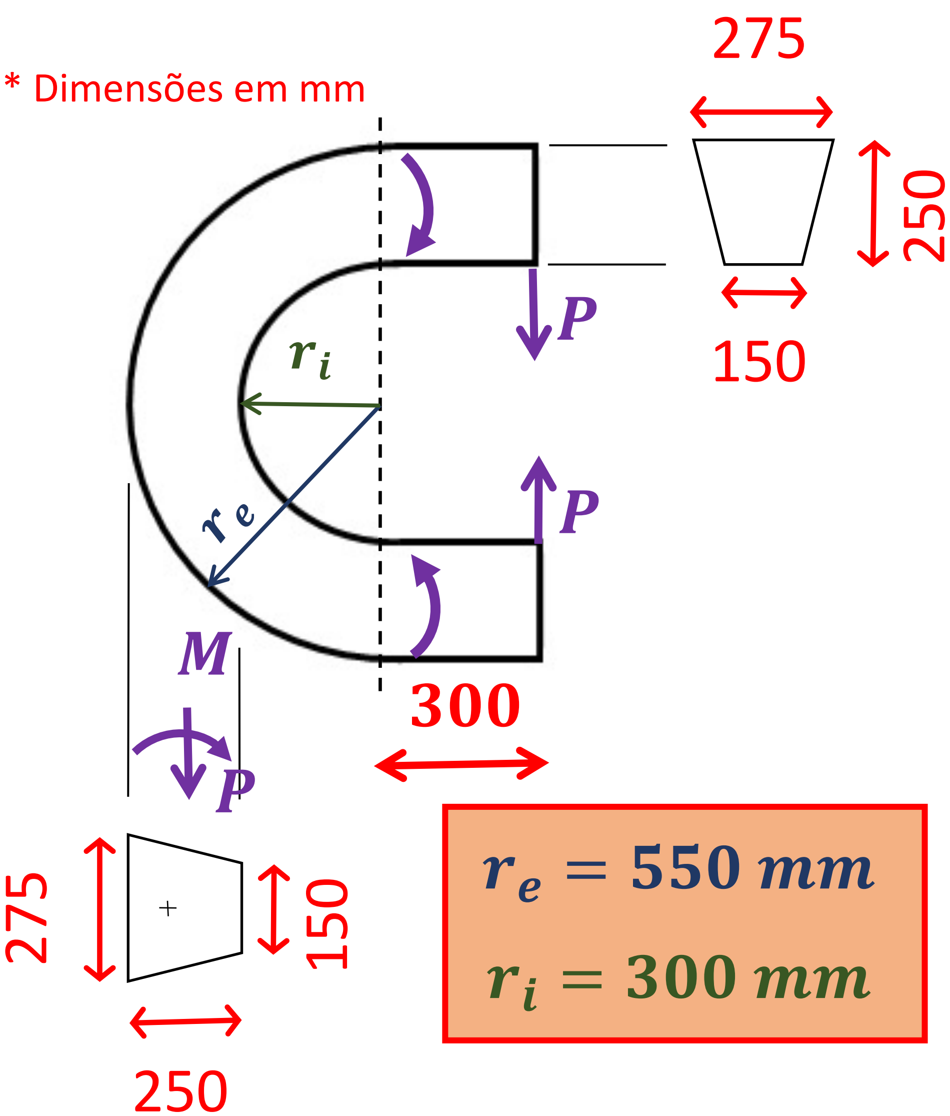
$$\bar{y} = \frac{\sum A.y}{\sum A} = \frac{2\times\frac{62{,}5\times 250}{2}\times\frac{250}{3} + (150\times 250)\times\frac{250}{2}}{2\times\frac{62{,}5\times 250}{2} + (150\times 250)} = 112{,}74\text{mm}$$

$$M = -P\times(300 + 250 - 112{,}74 + 300)$$
$$M = -737{,}26P$$

Exemplos – Viga Curva

Exemplo 3.2

Qual a carga máxima que a peça abaixo resiste sabendo-se que, r_e = 550 mm e r_i = 300 mm, e que o material é frágil com σ_t = 100 MPa e σ_c = 180 MPa?



$$r_e = 550\,mm$$
$$r_i = 300\,mm$$

A equação da distribuição das tensões para uma flexão composta:

$$\boxed{\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M(R - r)}{Ar(\bar{r} - R)}}$$

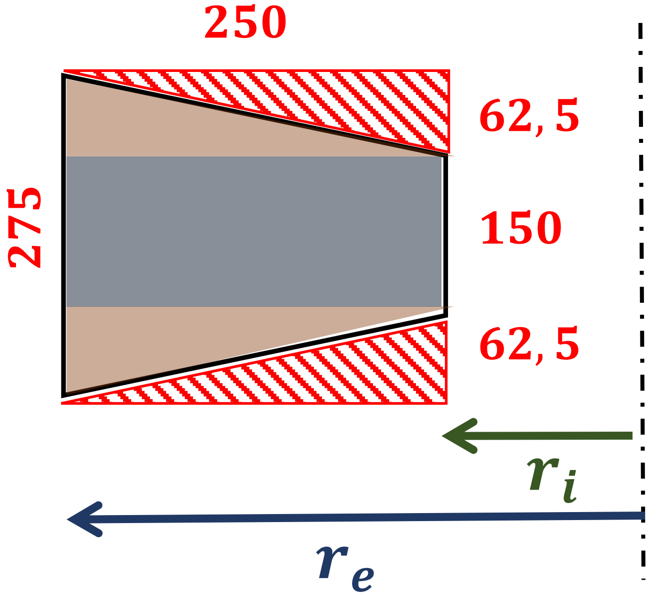
$$\left\{\begin{array}{ll} r_e \rightarrow Ok & A \rightarrow Ok \\ r_i \rightarrow Ok & \sigma \rightarrow Ok \\ M \rightarrow Ok & R \rightarrow ?? \\ & P \rightarrow ?? \end{array}\right.$$

Exemplos – Viga Curva

Exemplo 3.2

Qual a carga máxima que a peça abaixo resiste sabendo-se que, r_e = 550 mm e r_i = 300 mm, e que o material é frágil com σ_t = 100 MPa e σ_c = 180 MPa?

Para o cálculo da linha neutra de uma seção composta:



Retângulo de fora (b = 275 e h = 250 mm):

$$\int_A \frac{dA}{r} = b.\,ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = 275.\,ln\left(\frac{550}{300}\right) = 166{,}6873\ mm$$

Triângulo hachurado em vermelho (base mais próxima do eixo de curvatura):

$$\int_A \frac{dA}{r} = \frac{b.\,r_2}{(r_2 - r_1)} x ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) - b = \frac{62{,}5x550}{550-300}.\,ln\left(\frac{550}{300}\right) - 62{,}5 = 20{,}8437\ mm$$

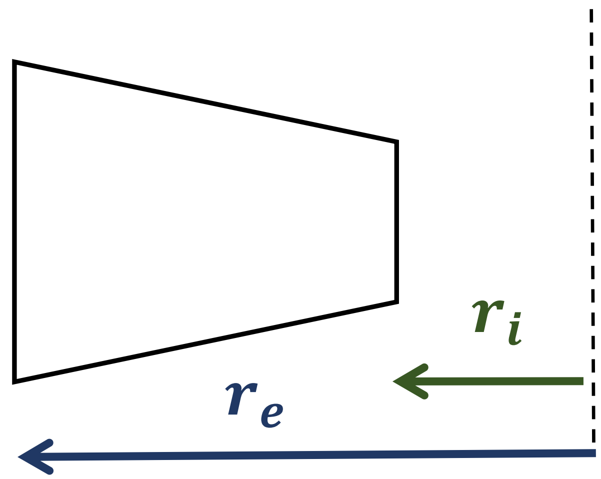
$$\boxed{R = \frac{\sum A}{\sum \int_A \frac{1}{r} dA} = \frac{275x250 - 2\left({}^{62{,}5x250}/_{2}\right)}{166{,}6873 - 2(20{,}8437)} = 425{,}0mm}$$

Exemplos – Viga Curva

Exemplo 3.2

Qual a carga máxima que a peça abaixo resiste sabendo-se que, r_e = 550 mm e r_i = 300 mm, e que o material é frágil com σ_t = 100 MPa e σ_c = 180 MPa?

A equação da distribuição das tensões para uma flexão composta:



$$r_e = 550\ mm$$
$$r_i = 300\ mm$$
$$R = 450\ mm$$

$$\sigma_{comp} = \frac{P}{A} + \frac{M(R - r_i)}{Ar_i(\bar{r} - R)} = \frac{-P}{53125} + \frac{-737{,}26Px(425 - 300)}{53125x300\ (437{,}26 - 425)} = -490x10^{-6}P$$

$$\sigma_{tração} = \frac{P}{A} + \frac{M(R - r_e)}{Ar_e(\bar{r} - R)} = \frac{-P}{53125} + \frac{-737{,}26Px(425 - 550)}{53125x550\ (437{,}26 - 425)} = 238x10^{-6}P$$

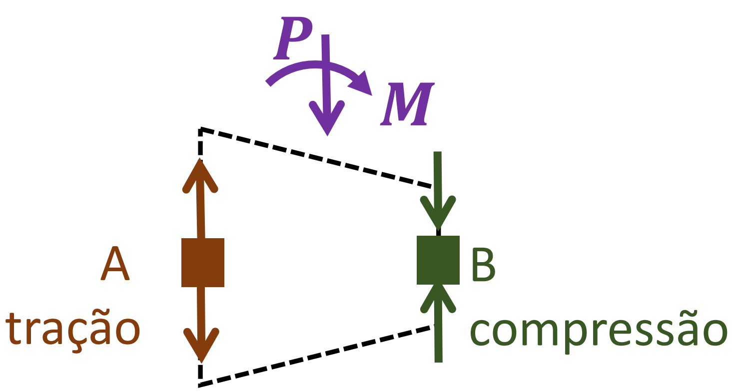
Exemplos – Viga Curva

Exemplo 3.2

Qual a carga máxima que a peça abaixo resiste sabendo-se que, r_e = 550 mm e r_i = 300 mm, e que o material é frágil com σ_t = 100 MPa e σ_c = 180 MPa?

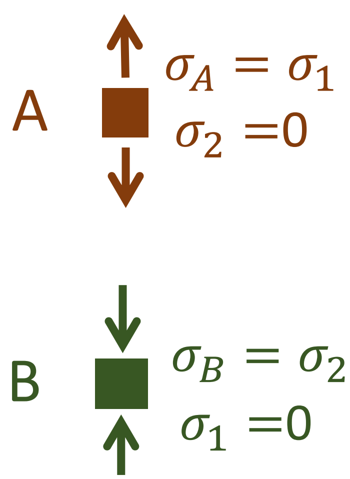
Com a determinação das tensões, a carga máxima aplicada é definida com base no critério de Falha de Mohr (material frágil)

$$\boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_t} - \frac{\sigma_2}{\sigma_c} < 1}$$



PONTO A:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_t} - \cancelto{0}{\frac{\sigma_2}{\sigma_c}} < 1 \quad \gg \quad \frac{238{,}46x10^{-6}P}{100} < 1 \quad \gg \quad \boxed{P < 419{,}4\ kN}$$



PONTO B:

$$\cancelto{0}{\frac{\sigma_1}{\sigma_t}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_c} < 1 \quad \gg \quad \frac{-490{,}4x10^{-6}P}{-180} < 1 \quad \gg \quad \boxed{P < 367{,}0\ kN}$$

a menor carga controla!

Obrigado