

Capítulo 5

Viga sobre Bases Elásticas

Professores Luciano Lima e André Tenchini



Vigas sobre Bases Elásticas

- Este capítulo apresenta as bases para o estudo estático e elástico da **flexão simples de vigas** suportadas diretamente pelo **terreno**
- Neste sentido, este terreno constitui, então, num **apoio elástico contínuo** para estas vigas

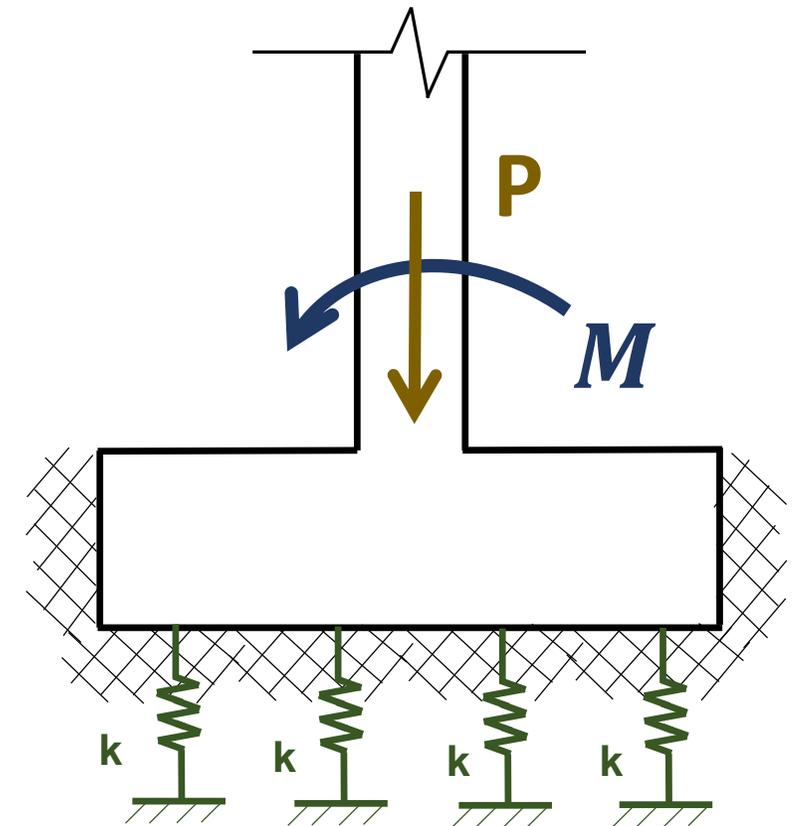
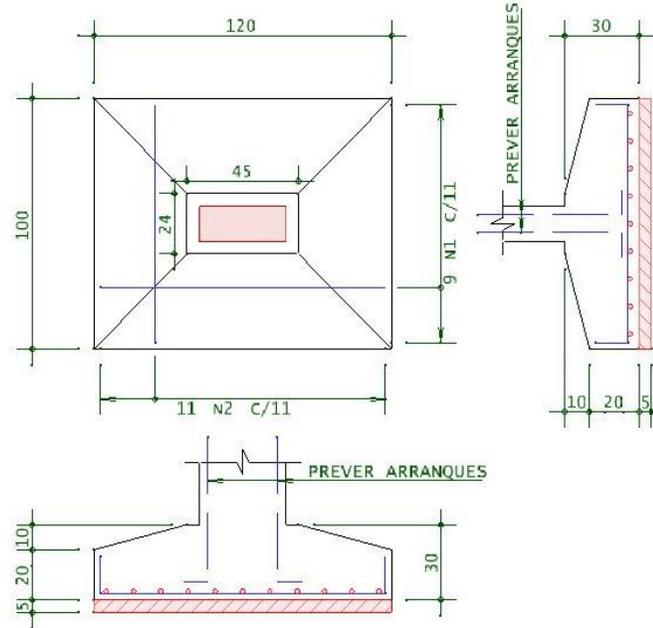
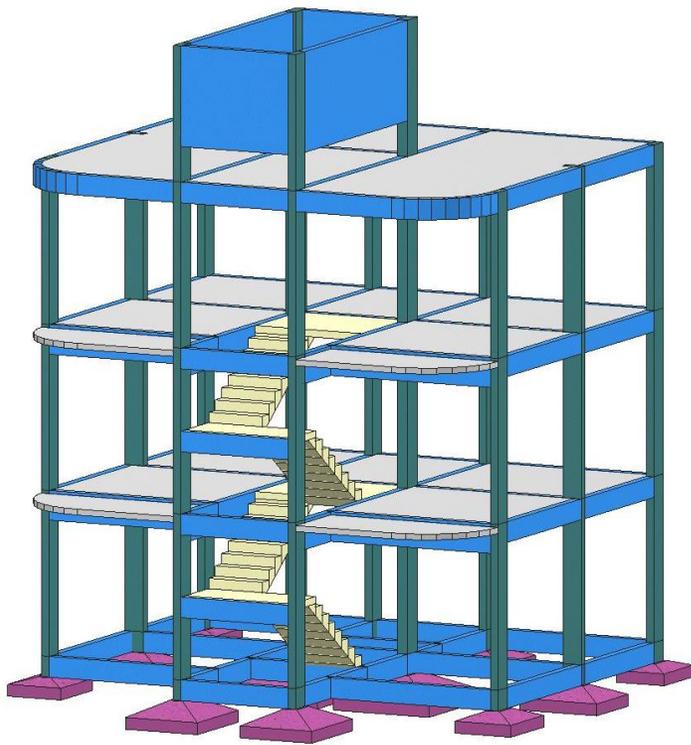
Fundação Direta
(Sapata)

Trilho de Trem

Fundação
Indireta (Estacas)

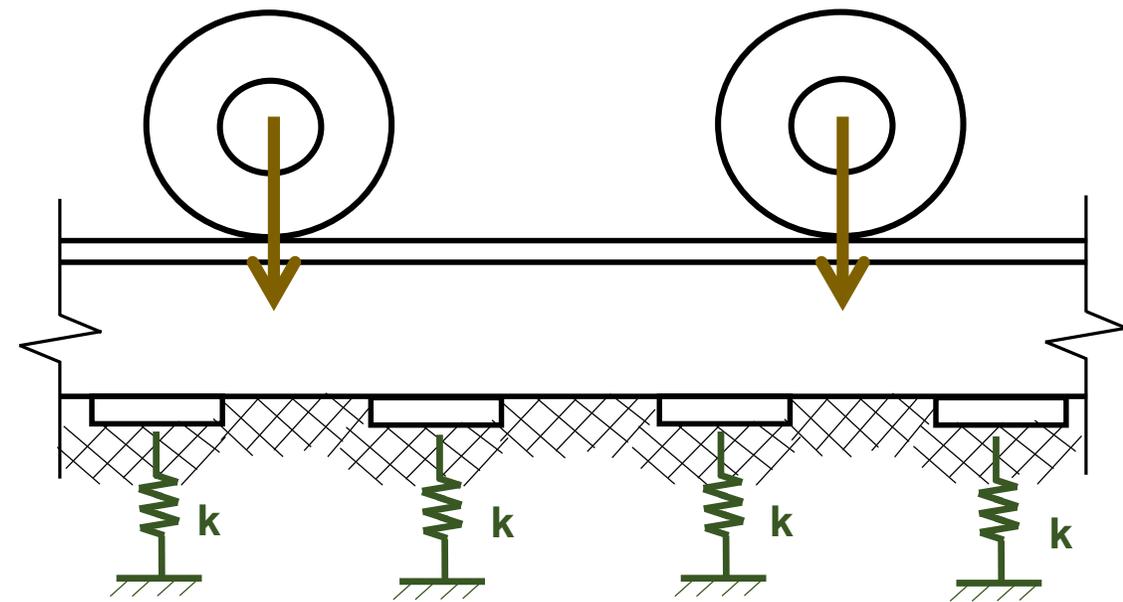
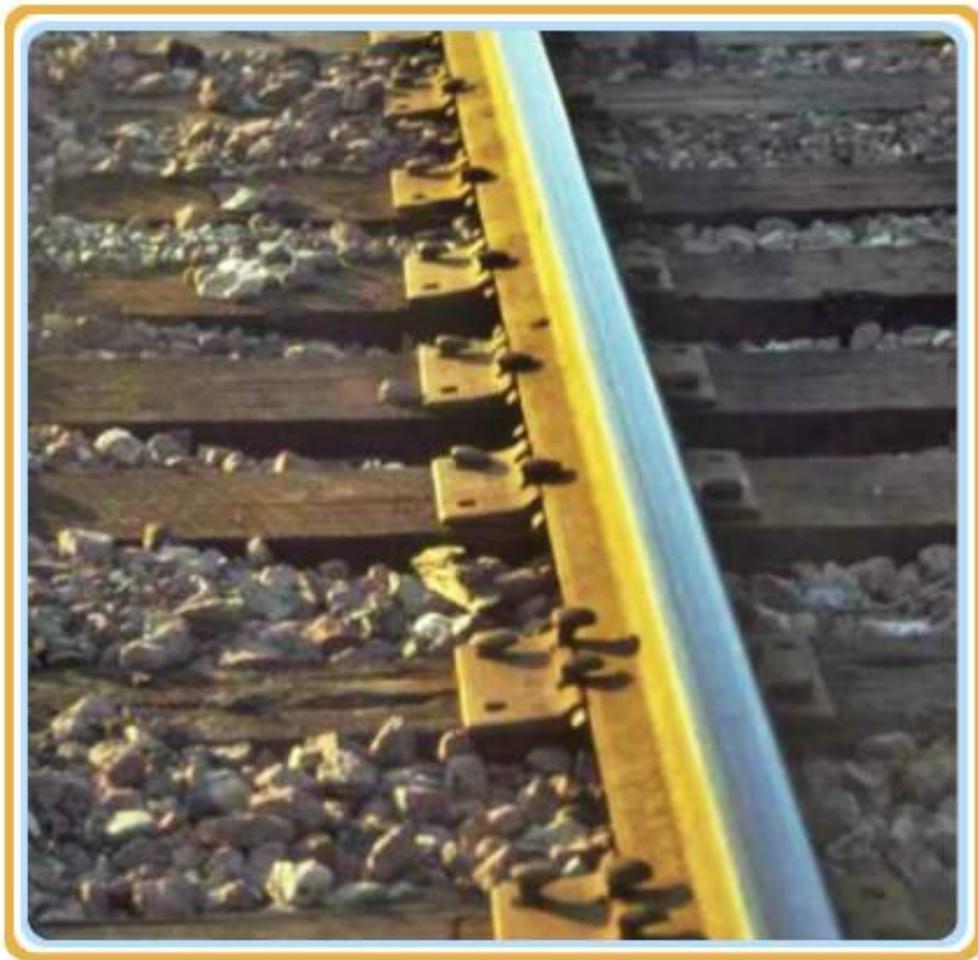
Vigas sobre Bases Elásticas

- Fundação Direta (Sapatas)



Vigas sobre Bases Elásticas

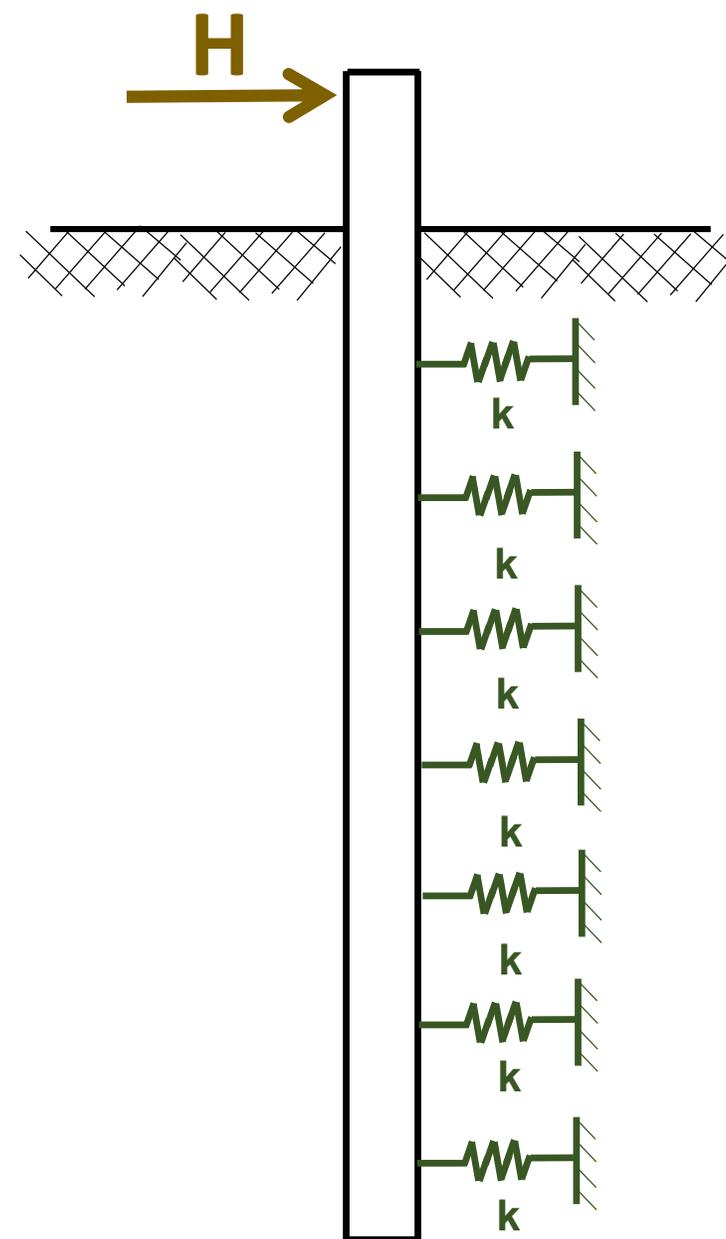
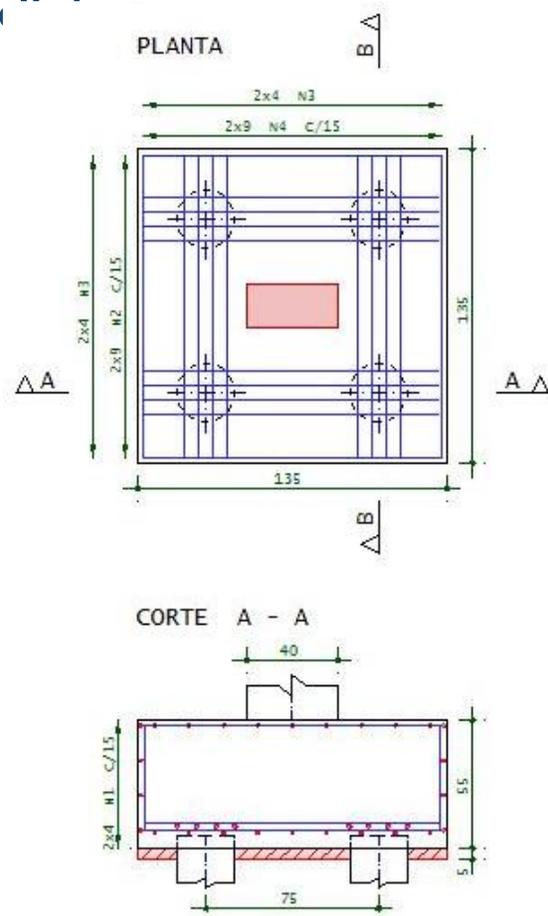
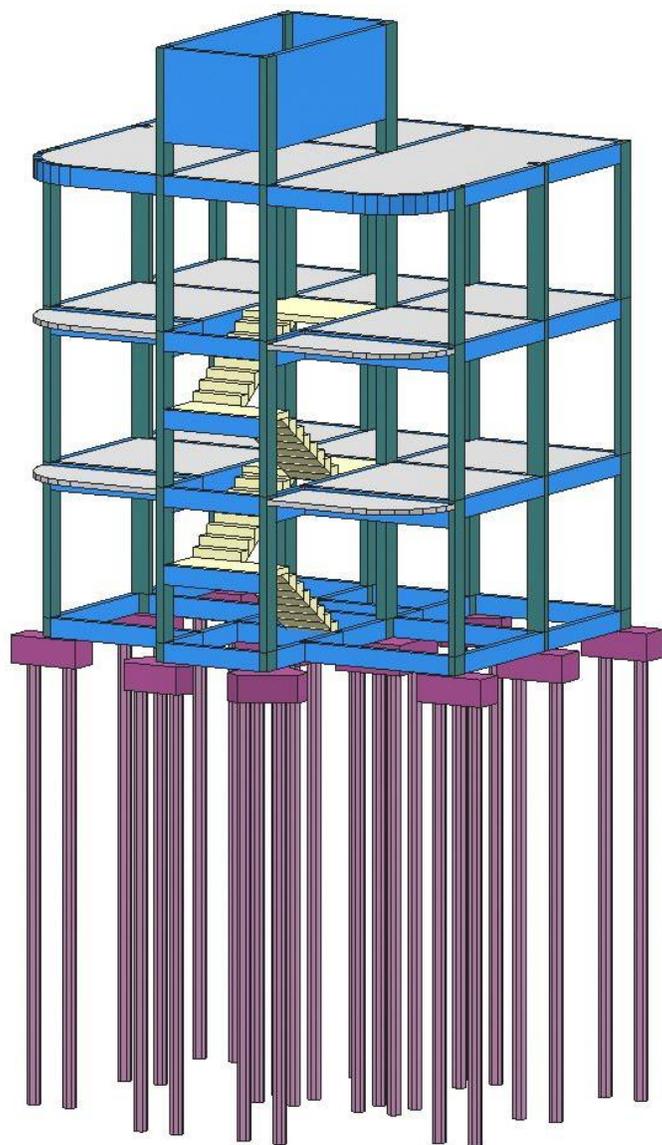
- Trilho de trem



Fonte: <http://br.suyurailway.com/ShowProducts.asp?id=45>

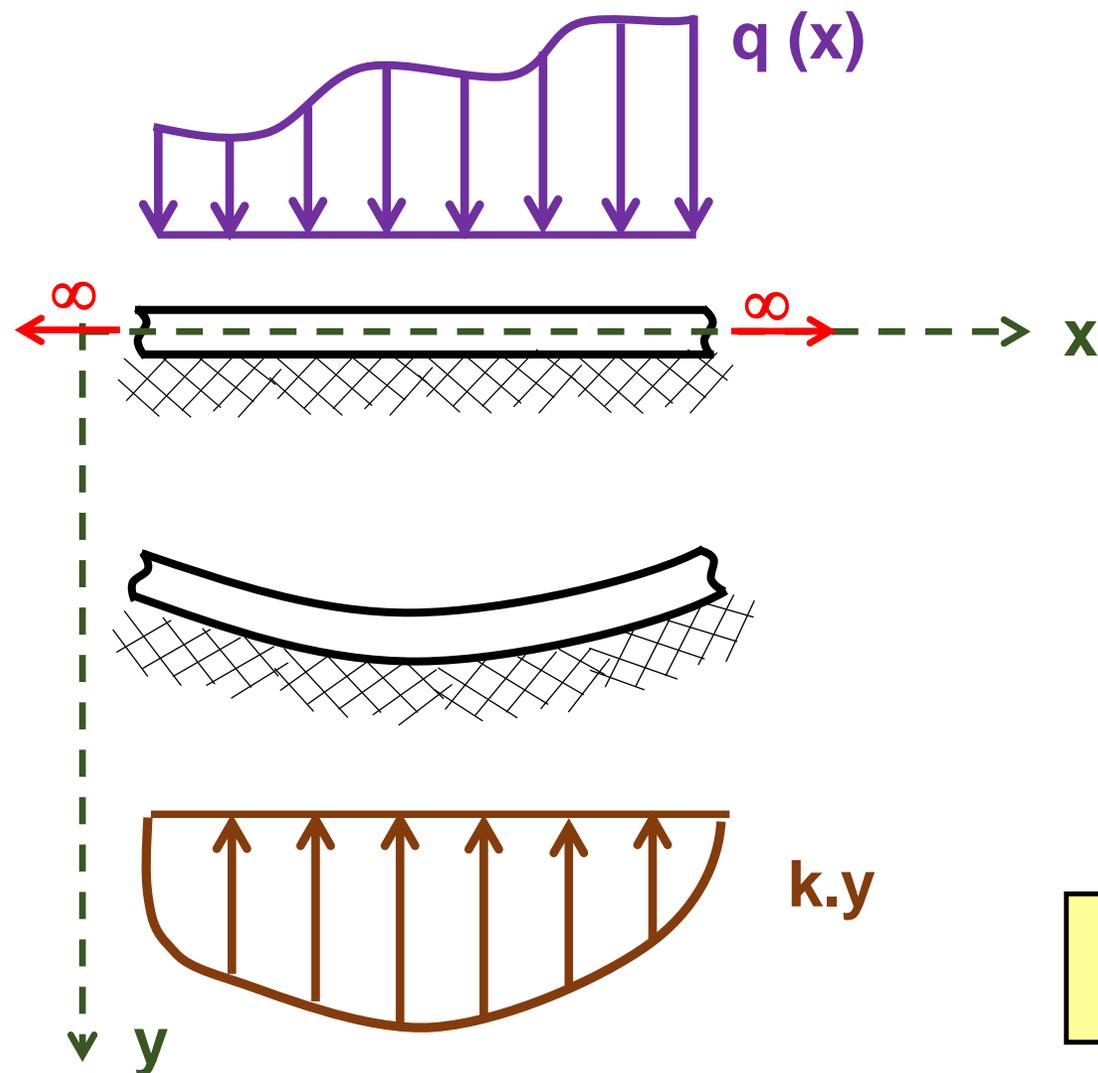
Vigas sobre Bases Elásticas

- Fundação Indireta (Estaca)



Vigas sobre Bases Elásticas

Vigas de comprimento infinito



$$EI_z \frac{d^4 y}{dx^4} = q$$



$$EI_z \frac{d^4 y}{dx^4} = -k.y$$

A solução geral da equação acima pode ser escrita da seguinte forma:

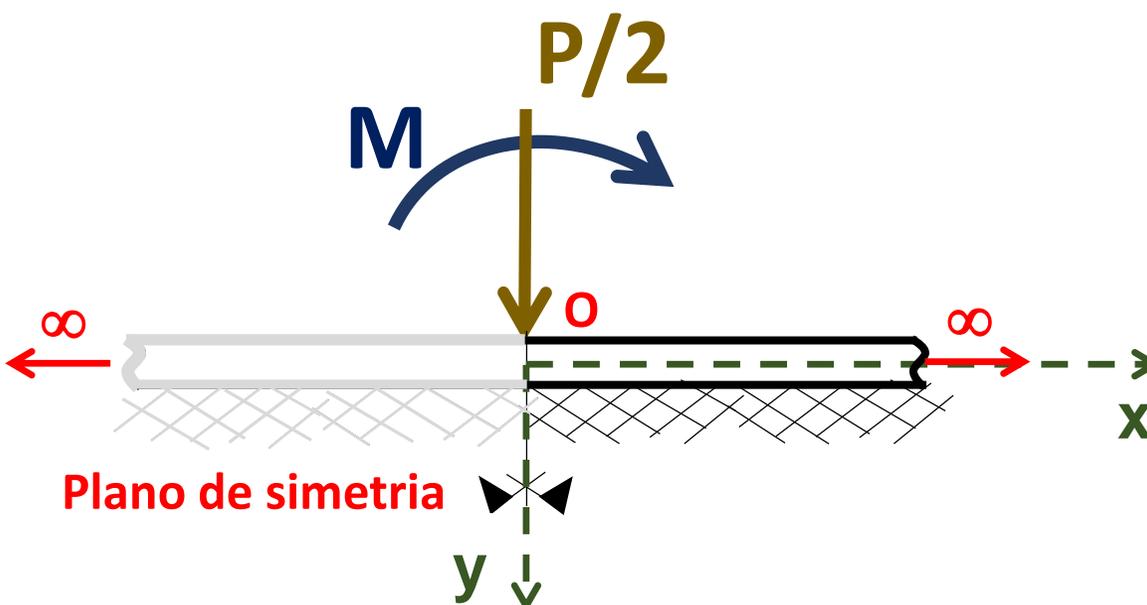
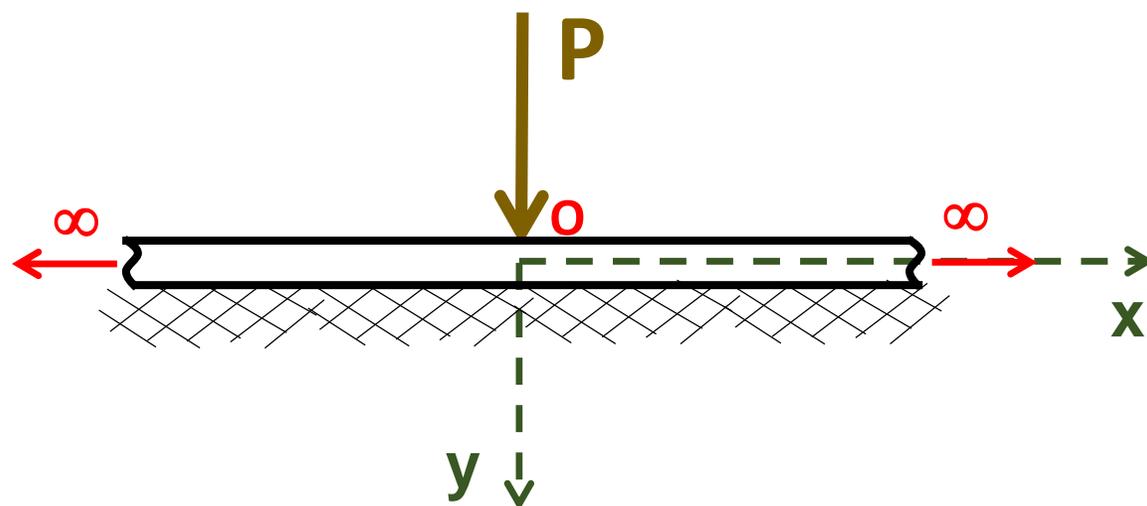
$$y = e^{\beta x} (A \cdot \cos \beta x + B \cdot \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C \cdot \cos \beta x + D \cdot \sin \beta x)$$

Fazendo: $\sqrt[4]{\frac{K}{4EI_z}} = \beta$

k – resistência do solo (N/mm²)

Vigas de comprimento infinito

Tipos de carregamento: Carga concentrada



Usando a equação geral e admitindo que o deslocamento vertical e as curvaturas, em pontos infinitamente distantes de P, são iguais a zero, tem-se:

$$y \rightarrow x \approx \infty \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad A = B = 0$$

$$y = e^{-\beta x} (C \cdot \cos \beta x + D \cdot \sin \beta x)$$

As constantes C e D devem ser determinadas pelas condições na origem:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = D$$

Portanto, a equação geral torna-se:

$$y = C e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x)$$

Vigas de comprimento infinito

Tipos de carregamento: Carga concentrada

Com a equação que descreve os deslocamento ao longo a viga, podemos ter:

$$y = Ce^{-\beta x} (\cos \beta x + \sen \beta x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -2\beta Ce^{-\beta x} \sen \beta x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2\beta^2 Ce^{-\beta x} (\sen \beta x - \cos \beta x)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 4\beta^3 Ce^{-\beta x} (\cos \beta x)$$

Relembrando

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{V}{EI} \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{q}{EI}$$

A constante **C** pode ser obtida pela condição em $x = 0$ considerando o cortante:

$$V_{x=0} = -\frac{P}{2} \Rightarrow EI \frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{P}{2}$$

$$EI [4\beta^3 Ce^{-\beta x} (\cos \beta x)]_{x=0} = -\frac{P}{2} \Rightarrow C = -\frac{P}{8EI\beta^3}$$

$$y = \frac{P\beta}{2K} e^{\beta x} (\cos \beta x + \sen \beta x) \quad \text{Deslocamento}$$

$$M = -EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P}{4\beta} e^{-\beta x} (\sen \beta x - \cos \beta x) \quad \text{Momento Fletor}$$

As equações acima são complexas. Então, faz-se uso de equações auxiliares



Vigas de comprimento infinito

Tipos de carregamento: Carga concentrada

Funções auxiliares:

fi $\varphi = e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sen \beta x)$	Psi $\psi = -e^{-\beta x} (\sen \beta x - \cos \beta x)$	Teta $\theta = e^{-\beta x} \cos \beta x$	Csi $\xi = e^{-\beta x} \sen \beta x$
↓	↓	↓	↓
$y = \frac{P\beta}{2k} \varphi(\beta x)$ Deslocamento	$M = -EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{4\beta} \psi(\beta x)$ Momento Fletor	$Q = -EI_z \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{P}{2} \theta(\beta x)$ Cortante	$\frac{dy}{dx} = -\frac{P\beta^2}{k} \xi(\beta x)$ Rotação

Com o uso das funções auxiliares, é possível simplificar o uso das equações através da Tabela ao lado.

Como pode ser observado, com o valor de βx , você poderá verificar o valor das funções auxiliares.

βx	φ	ψ	θ	ξ
0.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.0000000
0.1	0.9906500	0.8099840	0.9003170	0.0903330
0.2	0.9650673	0.6397540	0.8024106	0.1626567
0.3	0.9266574	0.4888039	0.7077307	0.2189268
0.4	0.8784406	0.3563707	0.6174056	0.2610349
0.5	0.8230670	0.2414944	0.5322807	0.2907863

Vigas de comprimento infinito

Tipos de carregamento: Carga concentrada

fi $\varphi = e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sen \beta x)$	Psi $\psi = -e^{-\beta x} (\sen \beta x - \cos \beta x)$	Teta $\theta = e^{-\beta x} \cos \beta x$	Csi $\xi = e^{-\beta x} \sen \beta x$
$y = \frac{P\beta}{2k} \varphi(\beta x)$ Deslocamento	$M = -EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{4\beta} \psi(\beta x)$ Momento Fletor	$Q = -EI_z \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{P}{2} \theta(\beta x)$ Cortante	$\frac{dy}{dx} = -\frac{P\beta^2}{k} \xi(\beta x)$ Rotação

Exemplo: Qual seria o deslocamento do ponto de aplicação da carga concentrada de 100 N de uma viga infinita?

$$y = \frac{100 \times 1}{2 \times 40} \varphi(0) = \frac{100}{80} \boxed{x1,0} = 1,25 \text{ mm}$$

$$k = 40 \text{ N/mm}^2$$

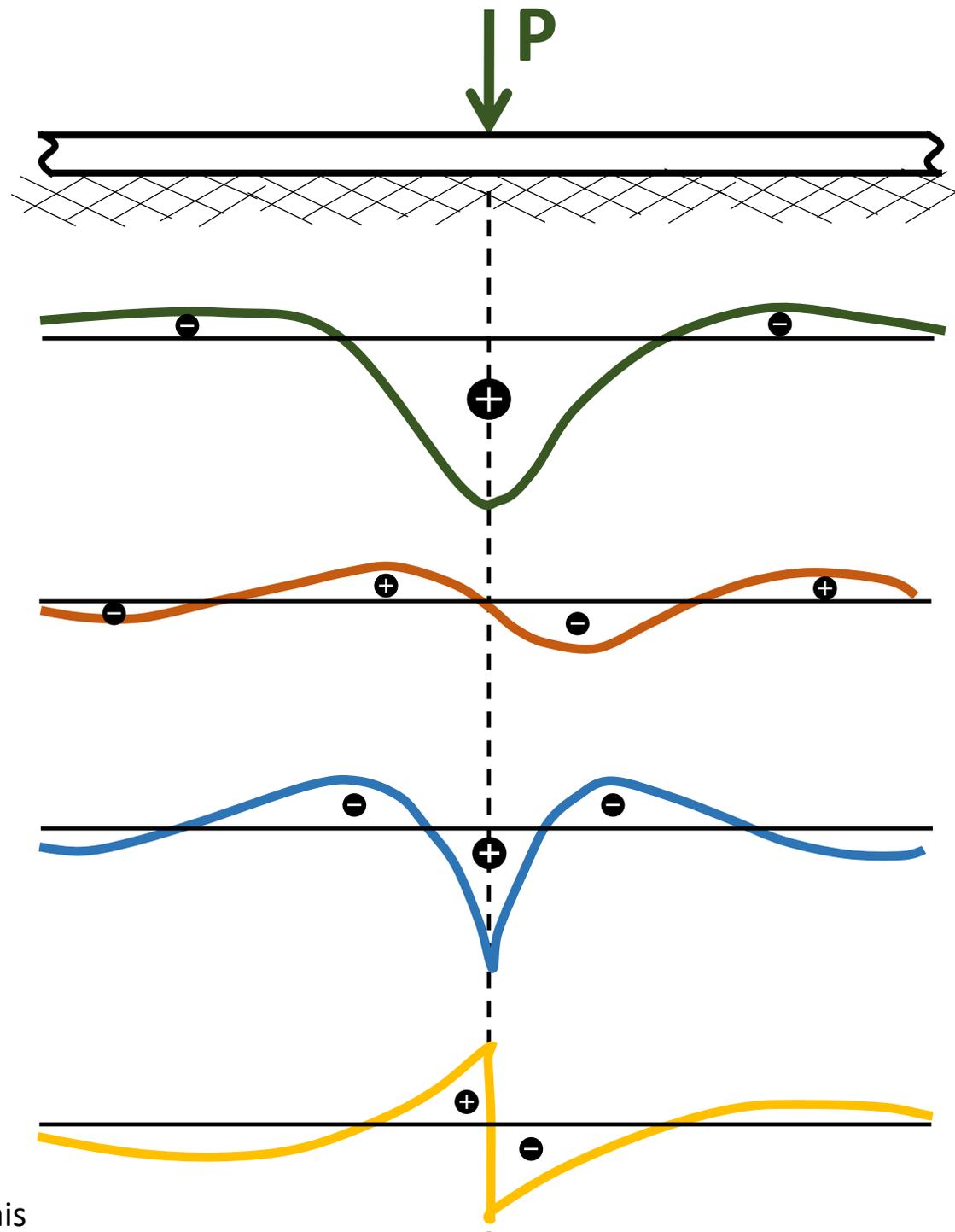
$$y = \frac{P\beta}{2k} \varphi(\beta x)$$

$$\beta = 1 \text{ mm}^{-1}$$

βx	φ	ψ	θ	ξ
0.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.0000000
0.1	0.9906500	0.8099840	0.9003170	0.0903330

Vigas de comprimento infinito

Tipos de carregamento: Carga concentrada



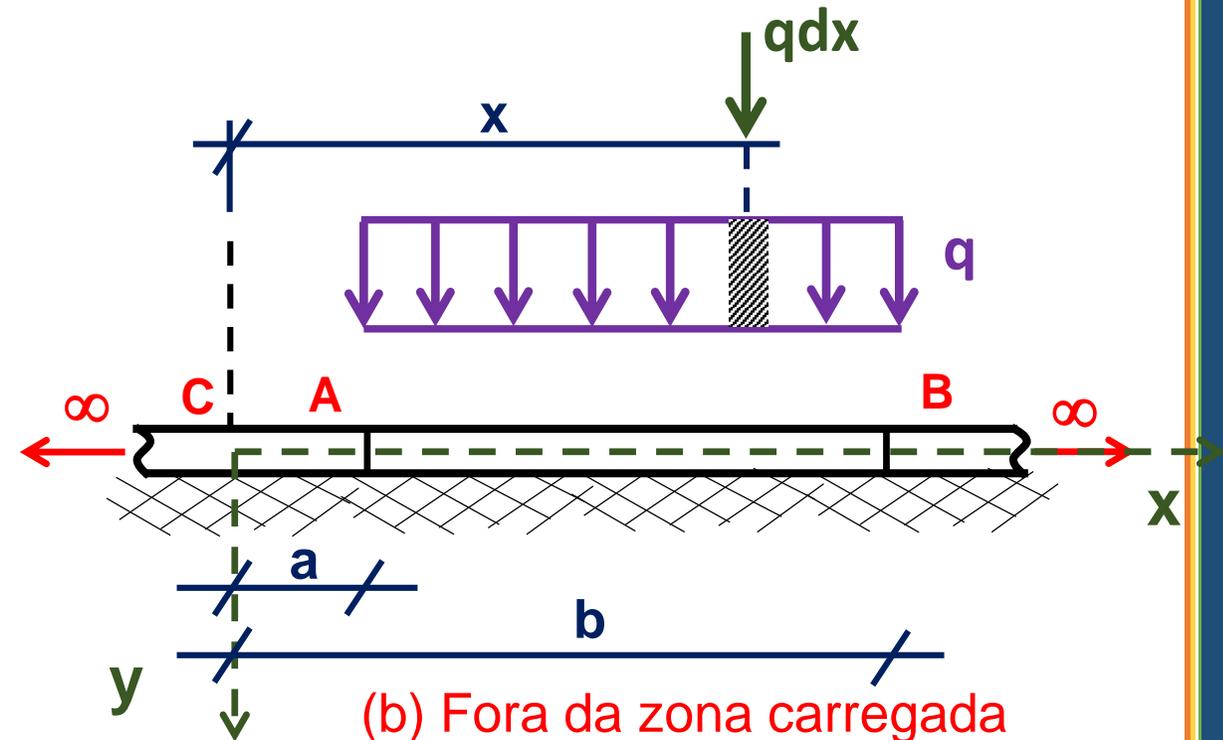
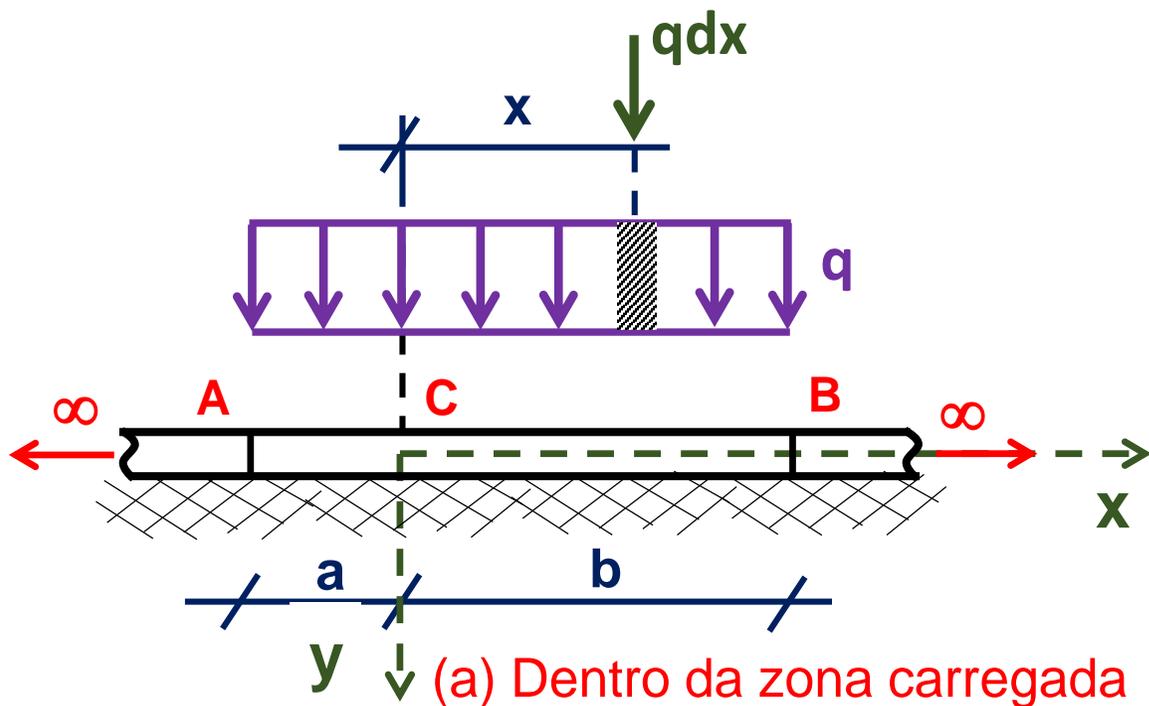
Convenção de sinais:

P e $y \rightarrow$ Positivos p/ baixo

M e $Q \rightarrow$ Convenção clássica de sinais

Vigas de comprimento infinito

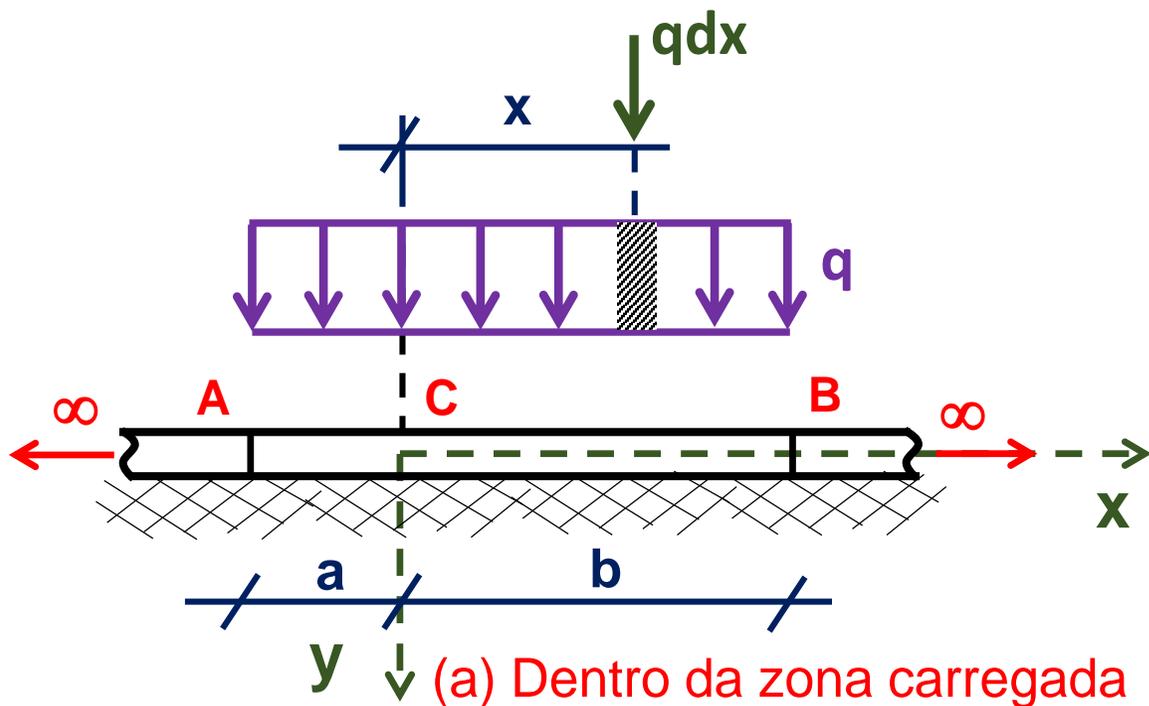
Tipos de carregamento: Carga uniformemente distribuída



Teremos dois casos para este tipo de carregamento: **ponto de análise dentro ou fora da atuação da carga**

Vigas de comprimento infinito

Tipos de carregamento: Carga uniformemente distribuída



O deslocamento em C, produzido por um elemento qdx da carga é obtido substituindo-se P por qdx na equação :

$$y = \frac{qdx}{8\beta^3 EI_z} e^{-\beta x} (\cos\beta x + \text{sen}\beta x)$$

O deslocamento em A provocado pela carga distribuída ao longo do comprimento ℓ será:

$$y = \int_0^a \frac{qdx}{8\beta^3 EI_z} e^{-\beta x} (\cos\beta x + \text{sen}\beta x) + \int_0^b \frac{qdx}{8\beta^3 EI_z} e^{-\beta x} (\cos\beta x + \text{sen}\beta x)$$

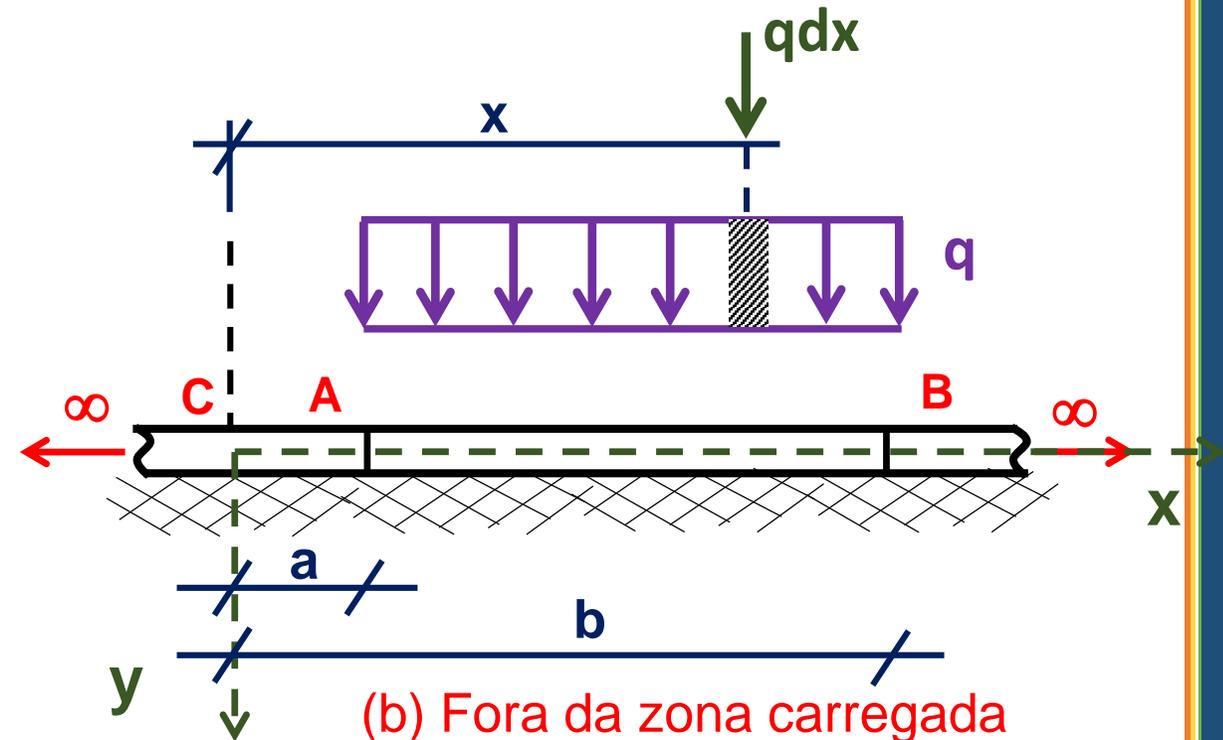
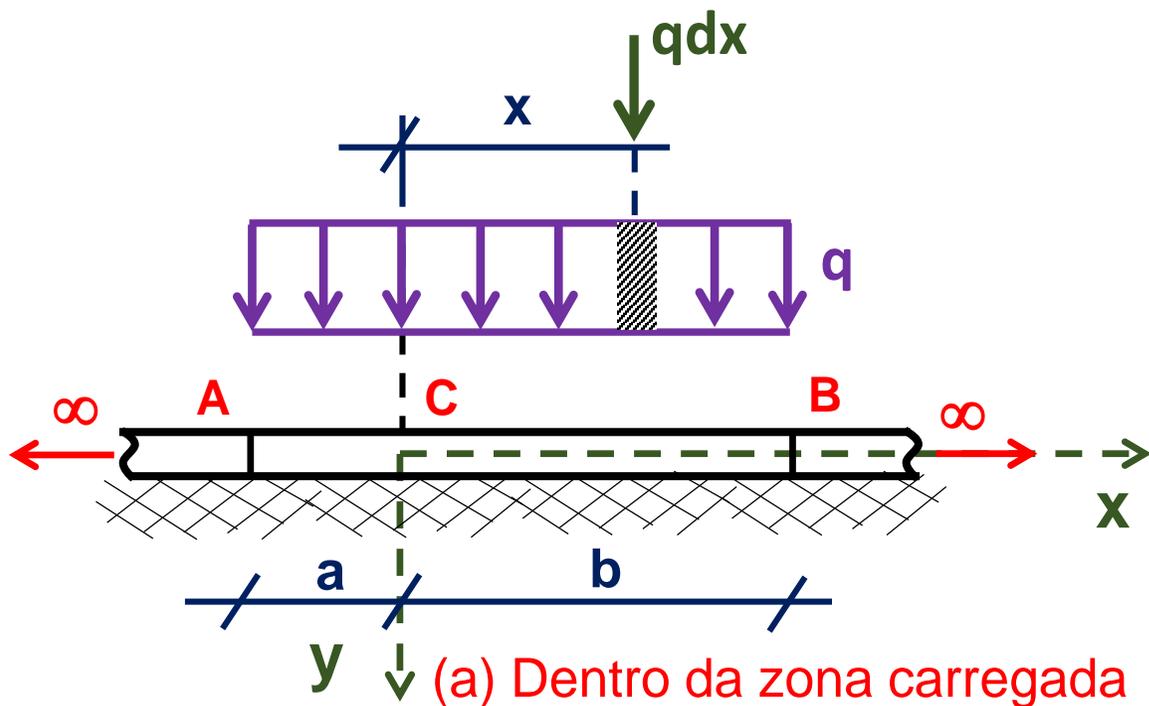
$$y = \frac{q}{2k} [2 - \theta(\beta a) - \theta(\beta b)] \quad \frac{dy}{dx} = \frac{q\beta}{2k} [\varphi(\beta a) - \varphi(\beta b)]$$

$$M = \frac{q}{4\beta^2} [\xi(\beta a) + \xi(\beta b)] \quad Q = \frac{q}{4\beta} [\psi(\beta a) - \psi(\beta b)]$$

$$y = \frac{q}{2k} (2 - e^{-\beta a} \cos\beta a - e^{-\beta b} \cos\beta b)$$

Vigas de comprimento infinito

Tipos de carregamento: Carga uniformemente distribuída



$$y = \frac{q}{2k} [2 - \theta(\beta a) - \theta(\beta b)] \quad \frac{dy}{dx} = \frac{q\beta}{2k} [\varphi(\beta a) - \varphi(\beta b)]$$

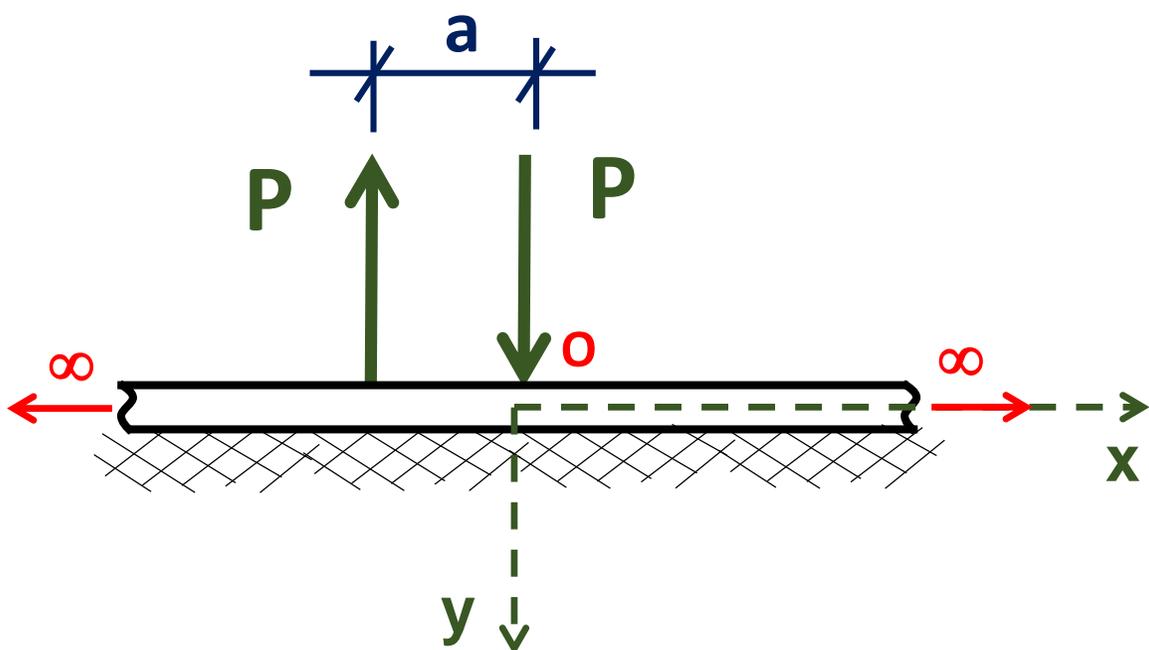
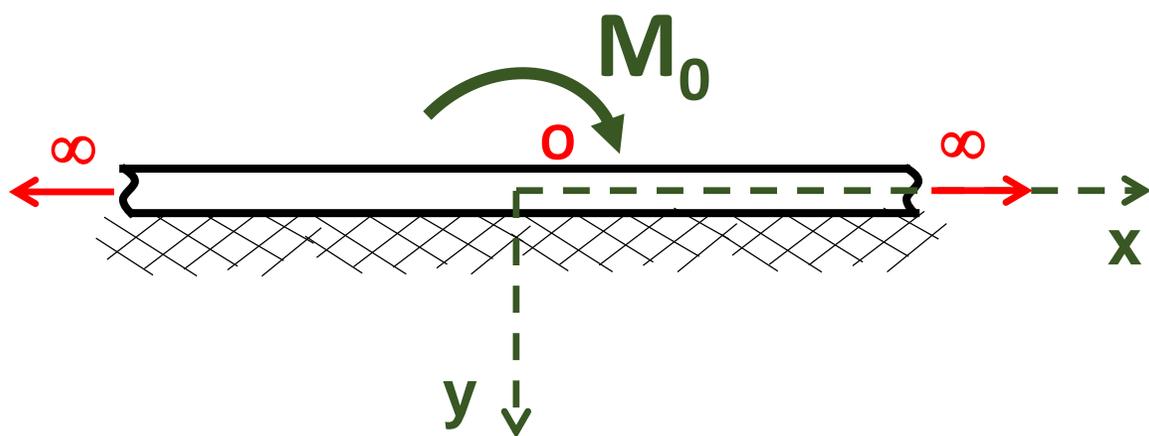
$$M = \frac{q}{4\beta^2} [\xi(\beta a) + \xi(\beta b)] \quad Q = \frac{q}{4\beta} [\psi(\beta a) - \psi(\beta b)]$$

$$y = \frac{q}{2k} [\theta(\beta a) - \theta(\beta b)] \quad \frac{dy}{dx} = \frac{q\beta}{2k} [\varphi(\beta a) - \varphi(\beta b)]$$

$$M = \frac{-q}{4\beta^2} [\xi(\beta a) - \xi(\beta b)] \quad Q = \frac{q}{4\beta} [\psi(\beta a) - \psi(\beta b)]$$

Vigas de comprimento infinito

Tipos de carregamento: Carga momento



Pode-se fazer o problema recair no caso de carga concentrada substituindo-se a carga momento M_0 por um binário com a tendendo para zero:

$$y = \frac{P\beta}{2k} \varphi(\beta x) \Rightarrow y(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{P\beta}{2k} \{\varphi(\beta x) - \varphi[\beta(x+a)]\} \Rightarrow$$

$$y(x) = -\frac{Pa\beta}{2k} \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{\varphi[\beta(x+a)] - \varphi(\beta x)}{a} \right\}$$

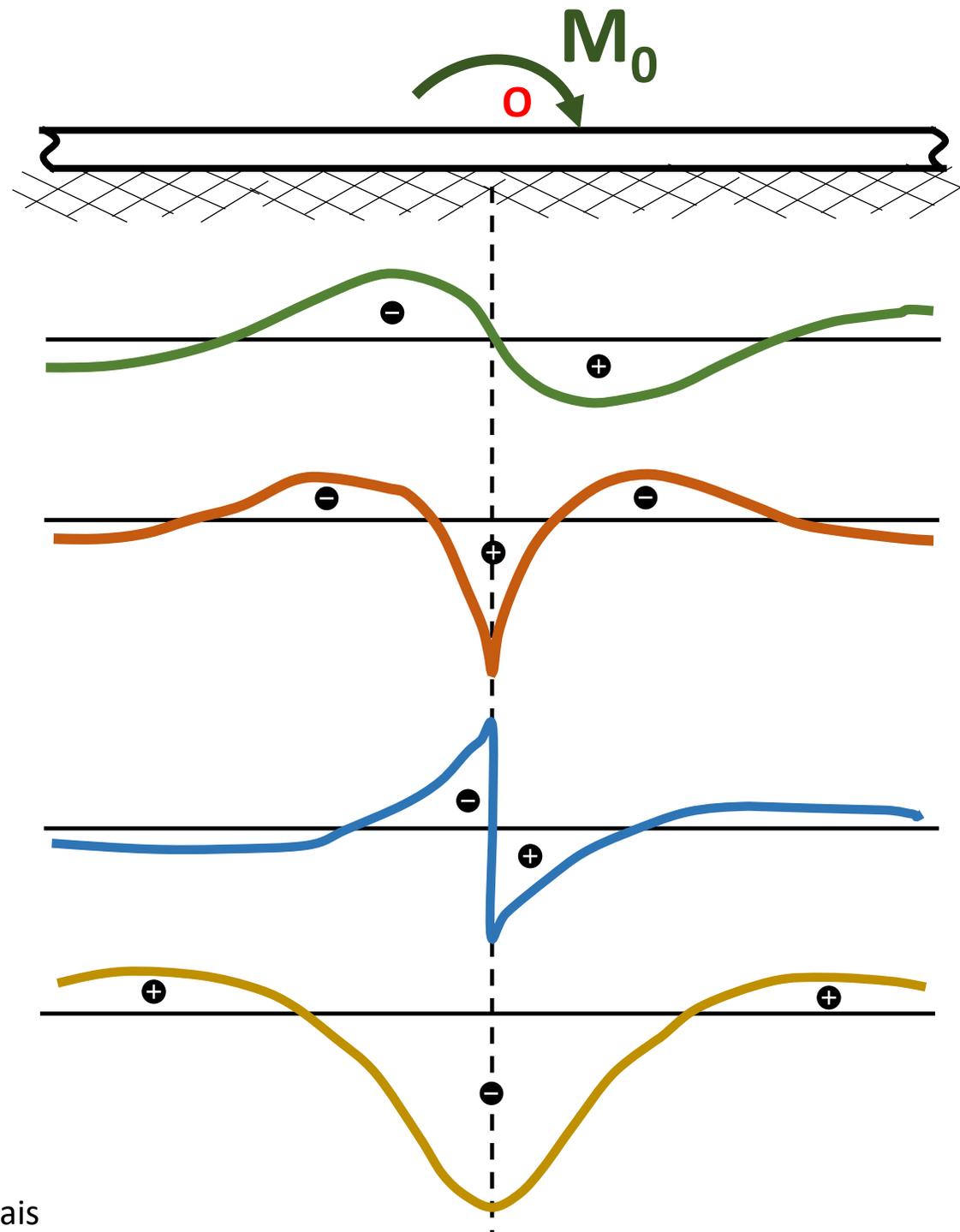
Entretanto, sabe-se que, $\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\}$ é uma derivada.

$$y(x) = \frac{M_0 \beta^2}{k} \xi(\beta x) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{M_0 \beta^3}{k} \psi(\beta x)$$

$$M_{(x)} = \frac{M_0}{2} \theta(\beta x) \quad Q_{(x)} = -\frac{M_0 \beta}{2} \varphi(\beta x)$$

Vigas de comprimento infinito

Tipos de carregamento: Carga momento



$$y_{(x)} = \frac{M_0 \beta^2}{k} \xi(\beta x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M_0 \beta^3}{k} \psi(\beta x)$$

$$M_{(x)} = \frac{M_0}{2} \theta(\beta x)$$

$$Q_{(x)} = -\frac{M_0 \beta}{2} \varphi(\beta x)$$

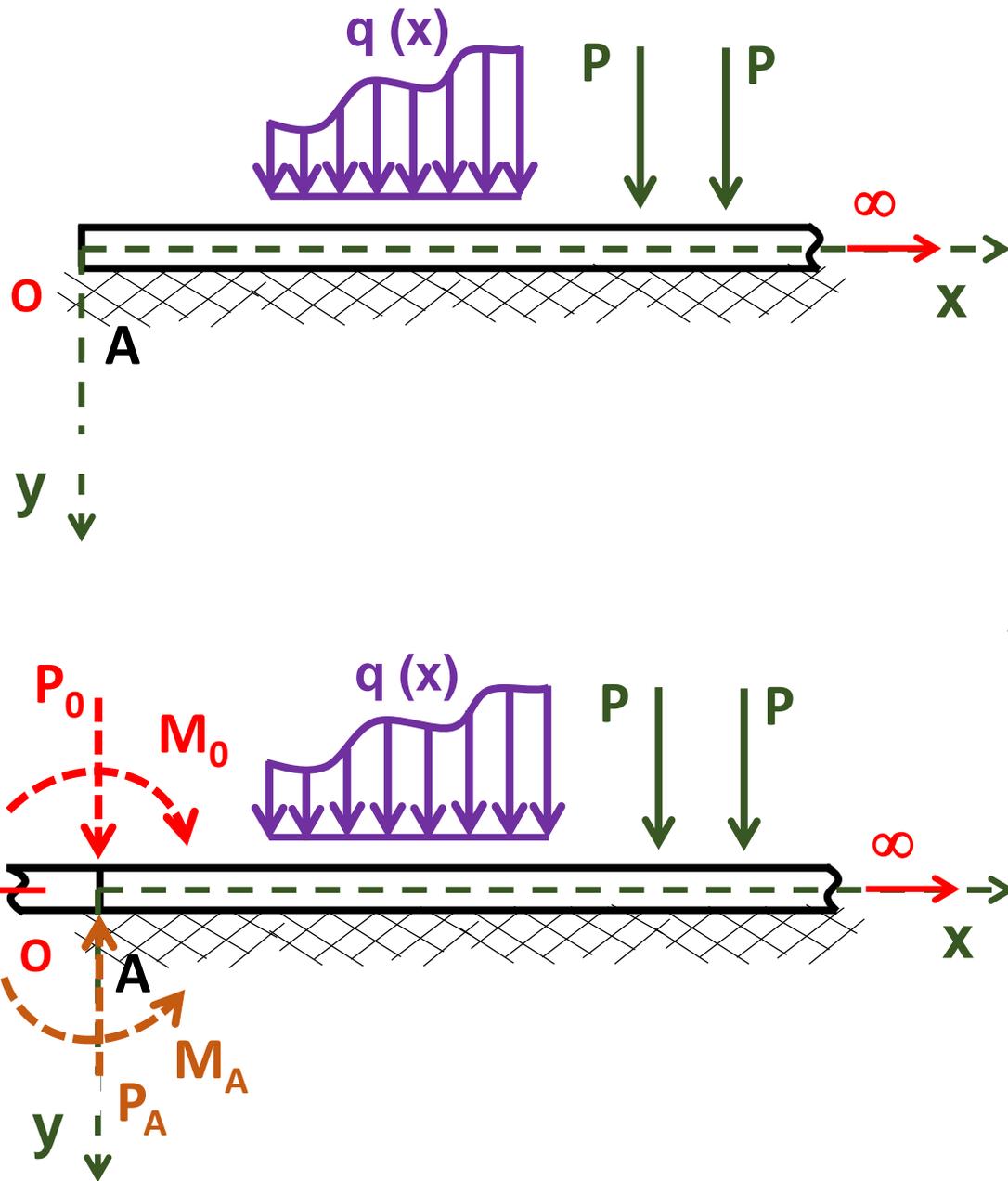
Convenção de sinais:

P e y → Positivos p/ baixo

M e Q → Convenção clássica de sinais

Vigas sobre Bases Elásticas

Vigas semi-infinitas com borda livre



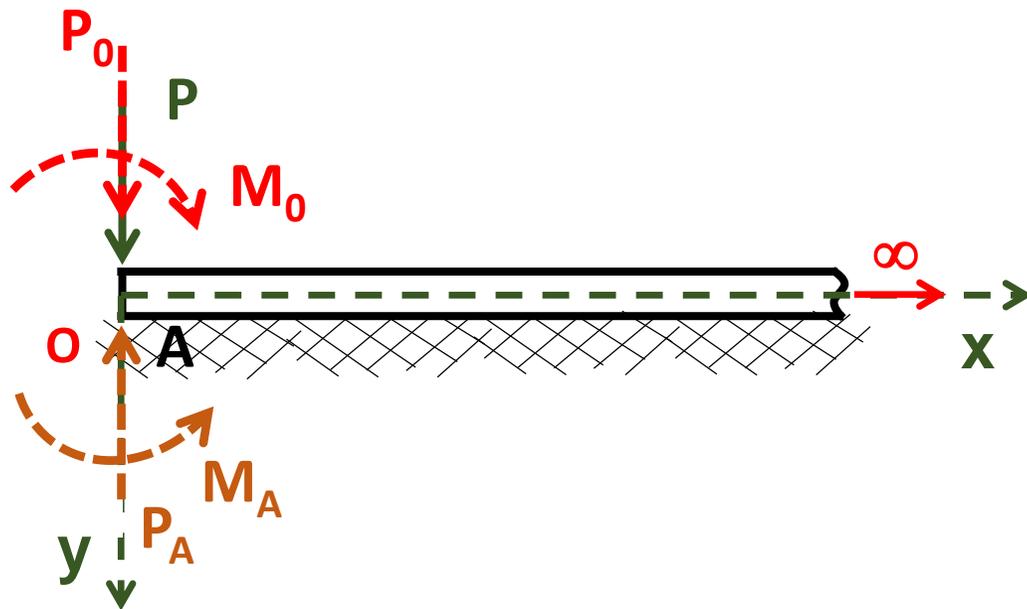
Procura-se então a maneira pela qual pode-se fazer com que sua resolução recaia na solução de uma viga infinita (problema resolvido anteriormente)

$$\begin{cases} \frac{P_0}{4\beta} \psi(\beta x) + \frac{M_0}{2} \theta(\beta x) = -M_A \\ -\frac{P_0}{2} \theta(\beta x) - \frac{M_0 \beta}{2} \varphi(\beta x) = -Q_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_0 = 4(\beta M_A + Q_A) \\ M_0 = -\frac{2}{\beta} (2\beta M_A + Q_A) \end{cases}$$

Assim, a resolução da viga semi-infinita será a resolução da **viga infinita submetida ao carregamento da semi-infinita, acrescido das cargas P_0 e M_0 definidas acima, atuantes em A^{esq} .**

Vigas sobre Bases Elásticas

Vigas semi-infinitas com borda livre

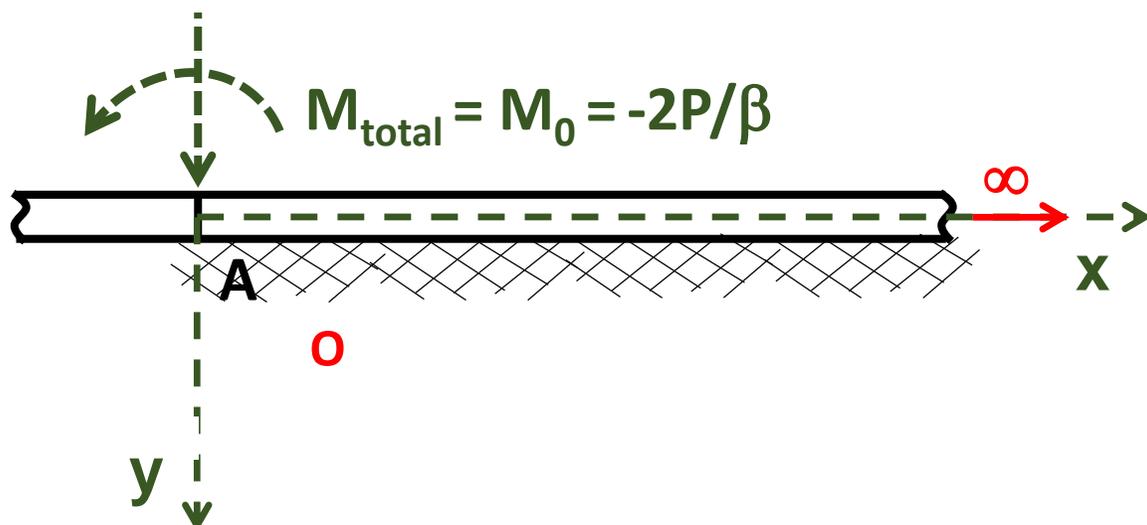


$$M_A^P = \frac{P}{4\beta} \underbrace{\psi(\beta x)}_1 = \frac{P}{4\beta} \quad Q_A^P = \frac{P}{2} \underbrace{\theta(\beta x)}_1 = \frac{P}{2}$$

$$P_0 = 4(\beta M_A + Q_A) = 4\left(\beta \frac{P}{4\beta} + \frac{P}{2}\right) = 3P$$

$$M_0 = -\frac{2}{\beta}(2\beta M_A + Q_A) = -\frac{2}{\beta}\left(2\beta \frac{P}{4\beta} + \frac{P}{2}\right) = -\frac{2P}{\beta}$$

$$P_{\text{total}} = P + P_0 = 4P$$



$$y = y^P + y^M = \frac{4P\beta}{2k} \varphi(\beta x) - \frac{2P}{\beta} \frac{\beta^2}{k} \xi(\beta x)$$

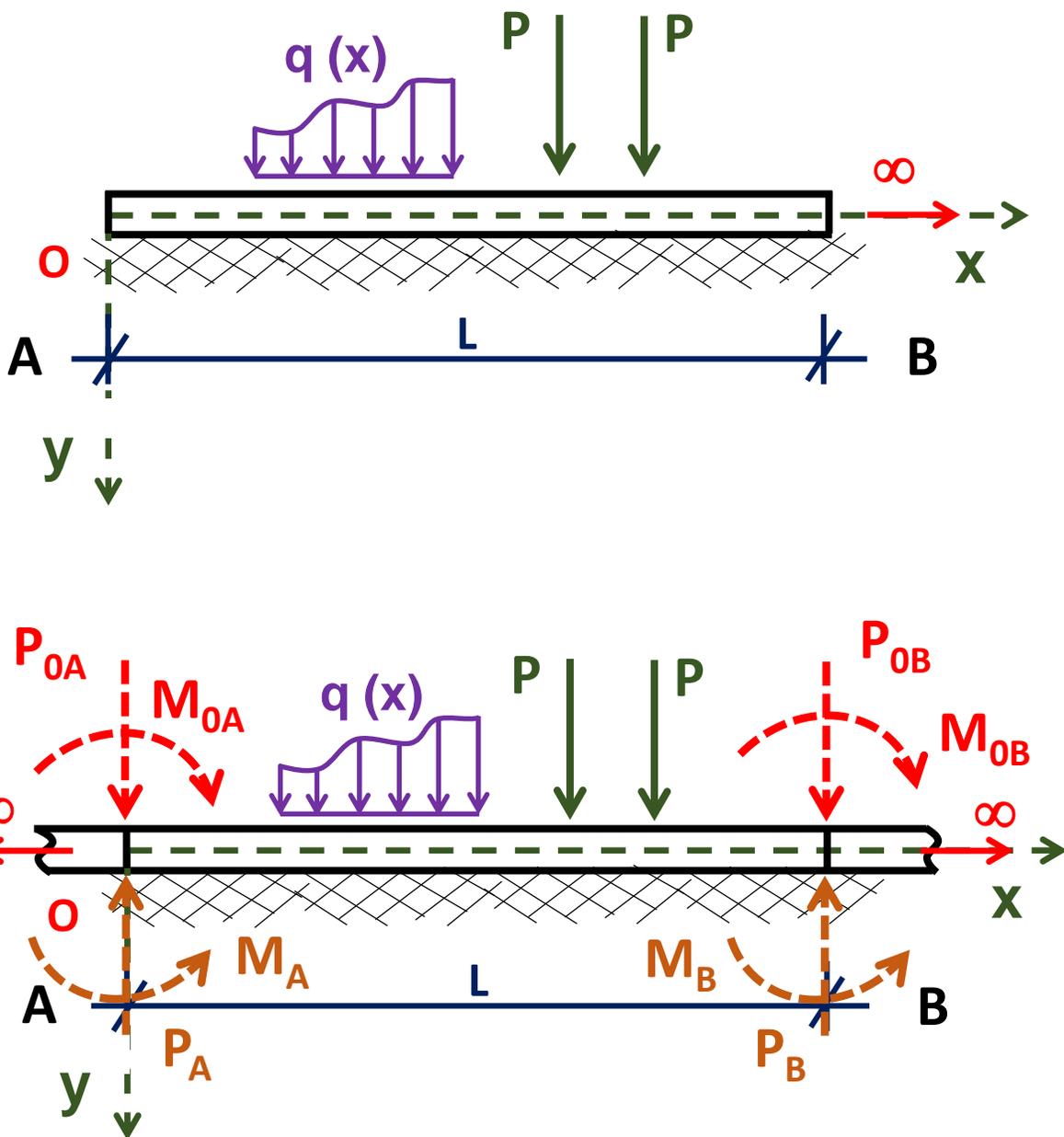
$$y = \frac{2P\beta}{k} [\varphi(\beta x) - \xi(\beta x)] = \frac{2P\beta}{k} \theta(\beta x)$$

$$M = M^P + M^M = \frac{4P}{4\beta} \psi(\beta x) - \frac{2P}{2\beta} \theta(\beta x)$$

$$M = \frac{P}{\beta} [\psi(\beta x) - \theta(\beta x)] = -\frac{P}{\beta} \xi(\beta x)$$

Vigas sobre Bases Elásticas

Vigas finitas com bordas livres



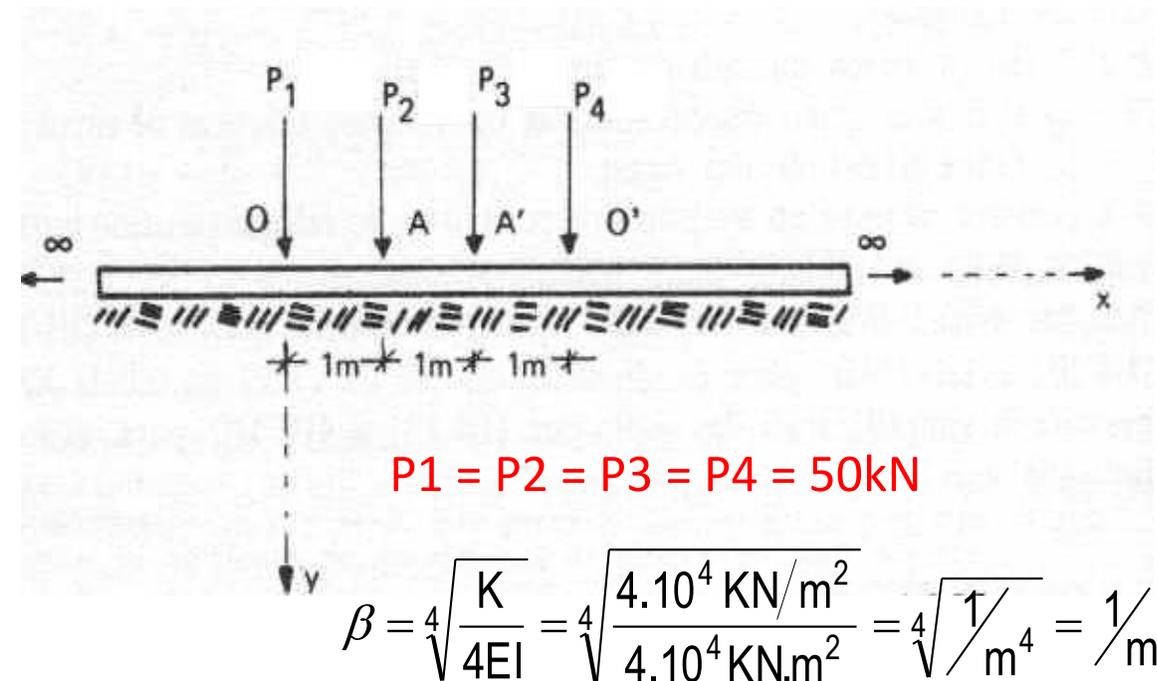
As cargas M_{0A} , P_{0A} , M_{0B} e P_{0B} são aplicadas em A^{esq} e B^{dir} respectivamente. As partes à esquerda de A e à direita de B das vigas infinitas ficam inertes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P_{0A}}{4\beta} \psi(0) + \frac{P_{0B}}{4\beta} \psi(\beta\ell) + \frac{M_{0A}}{2} \theta(0) + \frac{M_{0B}}{2} \theta(\beta\ell) = -M_A \\ -\frac{P_{0A}}{2} \theta(0) + \frac{P_{0B}}{2} \theta(\beta\ell) - \frac{\beta M_{0A}}{2} \varphi(0) + \frac{\beta M_{0B}}{2} \varphi(\beta\ell) = -Q_A \\ \frac{P_{0A}}{4\beta} \psi(\beta\ell) + \frac{P_{0B}}{4\beta} \psi(0) + \frac{M_{0A}}{2} \theta(\beta\ell) + \frac{M_{0B}}{2} \theta(0) = -M_B \\ -\frac{P_{0A}}{2} \theta(\beta\ell) + \frac{P_{0B}}{2} \theta(0) - \frac{\beta M_{0A}}{2} \varphi(\beta\ell) + \frac{\beta M_{0B}}{2} \varphi(0) = -Q_B \end{array} \right.$$

Exemplos – Viga de comprimento infinito

Exemplo 5.1

Obter os deslocamentos verticais e os momentos fletores atuantes sob os pontos de aplicação das cargas de **50 kN** indicadas abaixo para a viga infinita cuja rigidez à flexão EI é igual a 10^4 kN.m^2 e que se apóia sobre um meio elástico cuja constante de mola é $k = 4 \times 10^4 \text{ kN/m}^2$



$$y = \frac{P\beta}{2k} \varphi(\beta x) \quad M = -EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{4\beta} \psi(\beta x)$$

βx	φ	ψ	θ	ξ
0.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.0000000
1.0	0.5083260	-0.1107938	0.1987661	0.3095599
2.0	0.0667407	-0.1793794	-0.0563193	0.1230600
3.0	-0.0422629	-0.0563148	-0.0492888	0.0070260



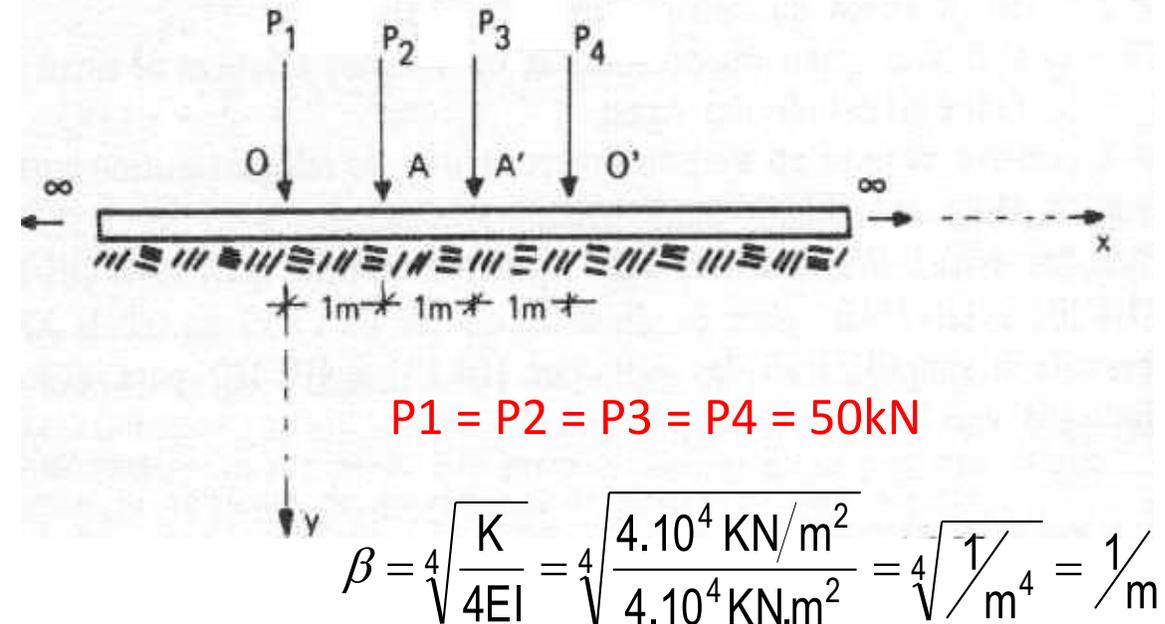
	P1	P2	P3	P4
βx	0	1	2	3
φ	1	0,5083	0,0667	-0,0423
ψ	1	-0,1108	-0,1794	-0,0563

Ponto 0: **Ponto A:**

Exemplos – Viga de comprimento infinito

Exemplo 5.1

Obter os deslocamentos verticais e os momentos fletores atuantes sob os pontos de aplicação das cargas de **50 kN** indicadas abaixo para a viga infinita cuja rigidez à flexão EI é igual a 10^4 kN.m^2 e que se apóia sobre um meio elástico cuja constante de mola é $k = 4 \times 10^4 \text{ kN/m}^2$



	P1	P2	P3	P4
βx	0	1	2	3
φ	1	0,5083	0,0667	-0,0423
ψ	1	-0,1108	-0,1794	-0,0563

$$M_0 = \frac{P}{4\beta} \psi(\beta x) = \frac{50 \text{ kN}}{4 \cdot \frac{1}{\text{m}}} (1 - 0,1108 - 0,1794 - 0,0563) \Rightarrow M_0 = 8,17 \text{ kN.m}$$

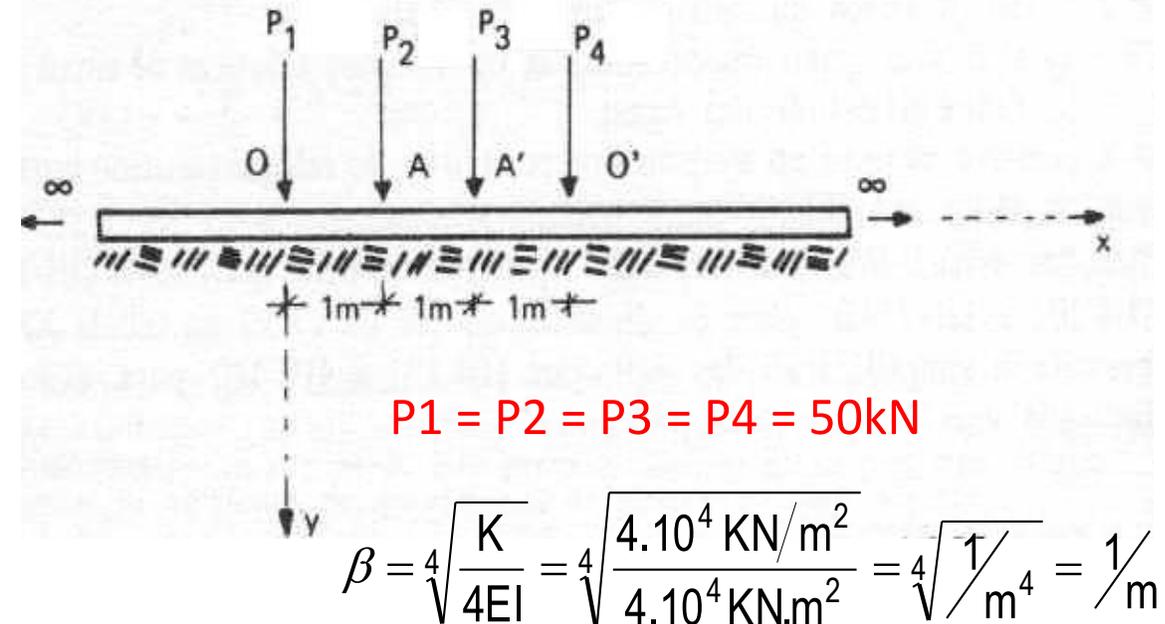
Ponto 0:

$$\delta_0 = \frac{P\beta}{2k} \varphi(\beta x) = \frac{50 \text{ kN} \cdot \frac{1}{\text{m}}}{2 \cdot 4 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2} (1 + 0,5083 + 0,0667 - 0,0423) \Rightarrow \delta_0 = 0,000957 \text{ m}$$

Exemplos – Viga de comprimento infinito

Exemplo 5.1

Obter os deslocamentos verticais e os momentos fletores atuantes sob os pontos de aplicação das cargas de **50 kN** indicadas abaixo para a viga infinita cuja rigidez à flexão EI é igual a 10^4 kN.m^2 e que se apóia sobre um meio elástico cuja constante de mola é $k = 4 \times 10^4 \text{ kN/m}^2$



	P1	P2	P3	P4
βx	0	1	2	3
φ	1	0,5083	0,0667	-0,0423
ψ	1	-0,1108	-0,1794	-0,0563

Devido a simetria existente (pois a viga é infinita), os valores encontrados para as seções O e A são também válidos para as seções O' e A', respectivamente

Ponto A:

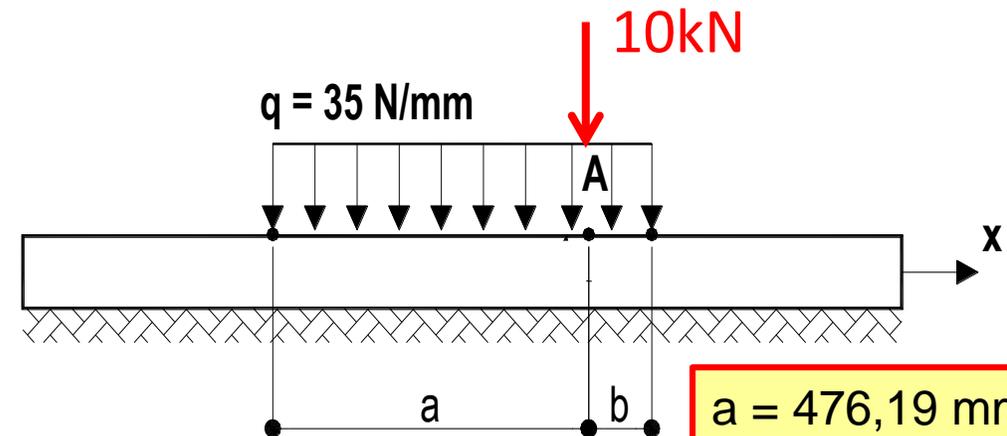
$$M_A = \frac{P}{4\beta} \psi(\beta x) = \frac{50 \text{ kN}}{4 \cdot \frac{1}{\text{m}}} (1 - 2(0,1108) - 0,1794) \Rightarrow M_A = 7,49 \text{ kN.m}$$

$$\delta_A = \frac{P\beta}{2k} \varphi(\beta x) = \frac{50}{2 \cdot 4 \cdot 10^4} (1 + 2(0,5083) + 0,0667) \Rightarrow \delta_A = 0,0013 \text{ m}$$

Exemplos – Viga de comprimento infinito

Exemplo 5.2

Obter o deslocamento e o momento fletor no ponto A da viga infinita abaixo sabendo-se que $EI = 344 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{mm}^2$ e $\beta = 6,3 \times 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$.



$$a = 476,19 \text{ mm}$$

$$b = 158,73 \text{ mm}$$

$$k = \left(\frac{6 \times 3 \times 10^{-4}}{\text{mm}} \right)^4 \times 4 \times 344 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{mm}^2$$

$$k = 0,217 \text{ N/mm}^2$$

(a) Carga concentrada

$$y_A^P = \frac{P\beta}{2k} \varphi(\beta x) \quad M_A^P = \frac{P}{4\beta} \psi(\beta x)$$

$$y_A^P = \frac{10 \times 10^3 \times 6,3 \times 10^{-4}}{2(0,217)}$$

$$\Rightarrow y_A^P = 14,53 \text{ mm}$$

$$M_A^P = \frac{10 \times 10^3 \times 1}{4 \times 6,3 \times 10^{-4}}$$

$$\Rightarrow M_A^P = 3,97 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\beta x = 6,3 \times 10^{-4} \times 0$$

$$\beta x = 0$$

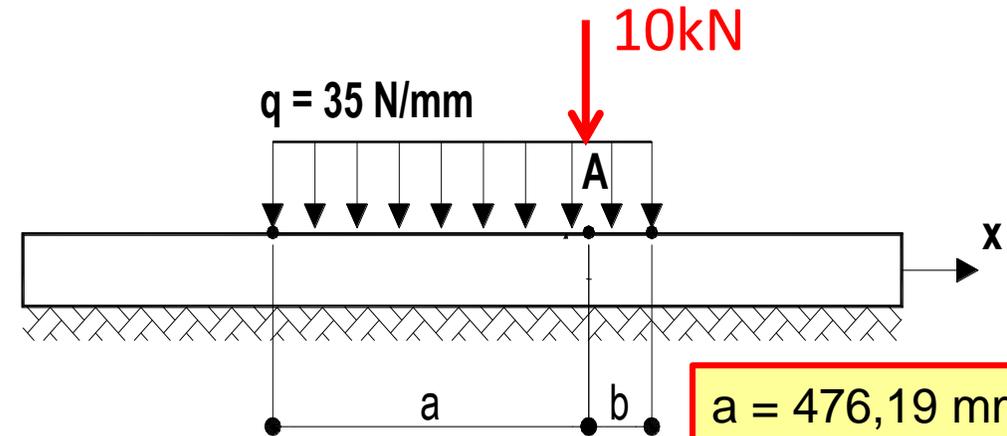
$$\varphi(\beta x) = 1$$

$$\psi(\beta x) = 1$$

Exemplos – Viga de comprimento infinito

Exemplo 5.2

Obter o deslocamento e o momento fletor no ponto A da viga infinita abaixo sabendo-se que $EI = 344 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{mm}^2$ e $\beta = 6,3 \times 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$.



$$a = 476,19 \text{ mm}$$

$$b = 158,73 \text{ mm}$$

$$k = \left(\frac{6 \times 3 \times 10^{-4}}{\text{mm}} \right)^4 \times 4 \times 344 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{mm}^2$$

$$k = 0,217 \text{ N/mm}^2$$

(b) Carga distribuída

$$y_A^q = \frac{q}{2k} [2 - \theta(\beta a) - \theta(\beta b)] \quad M_A^q = \frac{q}{4\beta^2} [\xi(\beta a) + \xi(\beta b)]$$

$$y_A^q = \frac{35}{2 \times 0,217} [2 - 0,7077 - 0,9003] \Rightarrow y_A^q = 31,61 \text{ mm}$$

$$M_A^q = \frac{35}{4 \times (6,3 \times 10^{-4})^2} (0,2189 + 0,0903) \Rightarrow M_A^q = 6,82 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\beta a = 6,3 \times 10^{-4} \times 476,19$$

$$\beta a = 0,30$$

$$\beta b = 6,3 \times 10^{-4} \times 158,73$$

$$\beta b = 0,10$$

$$\theta(\beta a) = 0,7077$$

$$\theta(\beta b) = 0,9003$$

$$\xi(\beta a) = 0,2189$$

$$\xi(\beta b) = 0,0903$$

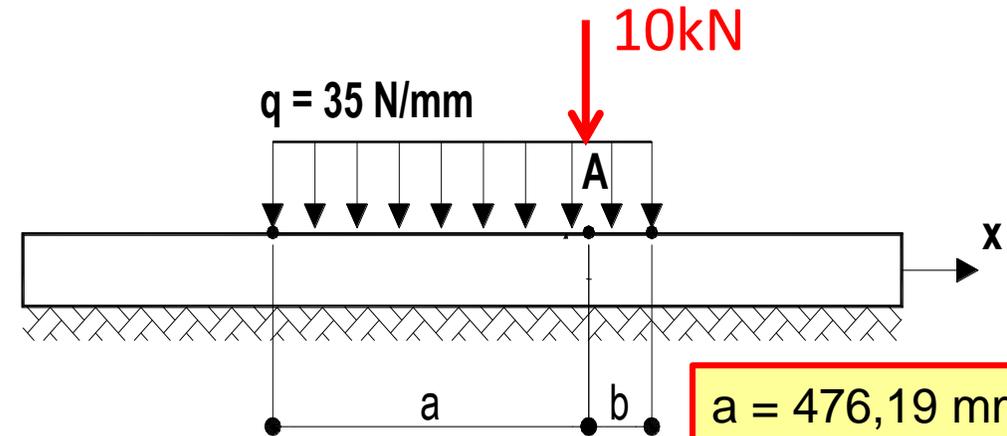
Exemplos – Viga de comprimento infinito

Exemplo 5.2

Obter o deslocamento e o momento fletor no ponto A da viga infinita abaixo sabendo-se que $EI = 344 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{mm}^2$ e $\beta = 6,3 \times 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$.

$$k = \left(\frac{6 \times 3 \times 10^{-4}}{\text{mm}} \right)^4 \times 4 \times 344 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{mm}^2$$

$$k = 0,217 \text{ N/mm}^2$$



$$a = 476,19 \text{ mm}$$

$$b = 158,73 \text{ mm}$$

(c) Total

Deslocamento:

$$y_A = y_A^P + y_A^q$$

$$y_A = 14,53 + 31,61 = 46,14 \text{ mm}$$

Momento fletor:

$$M_A = M_A^P + M_A^q$$

$$M_A = 3,97 + 6,82 = 10,79 \text{ kNm}$$

Obrigado

