Capítulo 6 - Treliças

6.1. Definição

Denomina-se treliça plana, o conjunto de elementos de construção (barras redondas, chatas, cantoneiras, I, U, etc.), interligados entre si, sob forma geométrica triangular, através de pinos, soldas, rebites, parafusos, que visam formar uma estrutura rígida, com a finalidade de resistir a esforços normais apenas.

A denominação treliça plana deve-se ao fato de todos os elementos do conjunto pertencerem a um único plano. A sua utilização na prática pode ser observada em pontes, viadutos, coberturas, guindastes, torres, etc.

Dois métodos de dimensionamento podem ser utilizados para as treliças:

- Método dos Nós ou Método de Cremona

- Método de Ritter ou Método das Seções (analíticos e usados com maior freqüência)

6.2. Métodos dos Nós ou Método de Cremona

A resolução de treliças planas pelo método dos nós consiste em verificar o equilíbrio de cada nó da treliça, seguindo-se os passos descritos a seguir:

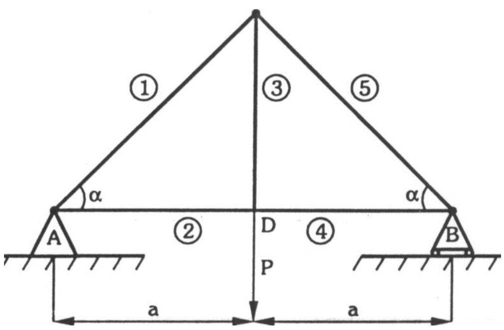
(a) determinação das reações de apoio

(b) identificação do tipo de solicitação em cada barra (barra tracionada ou barra comprimida)

(c) verificação do equilíbrio de cada nó da treliça, iniciando-se sempre os cálculos pelo nó que tenha o menor número de incógnitas.

Exemplo 1

Determinar as forças normais nas barras da treliça dada.



Solução

(a) Cálculo das reações de apoio

As reações de apoio em V_A e em V_B são iguais, pois a carga P está aplicada simetricamente aos apoios. Portanto,

$$V_A = V_B = \frac{P}{2}$$

(b) Identificação dos esforços nas barras

As barras 1 e 5 estão comprimidas, pois equilibram as reações de apoio. A barra 3 está tracionada, pois equilibra a ação da carga P no nó D. As barras 2 e 4 estão tracionadas, pois equilibram as componentes horizontais das barras 1 e 5.

(c) Cálculo dos esforços nas barras

Inicia-se o cálculo dos esforços pelo nó A, que juntamente com o nó B é o que possui o menor número de incógnitas.

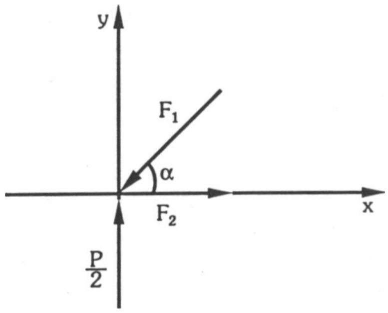
$$\sum F_y = 0$$

$$F_1 = \frac{P}{2\,\text{sen}\,\alpha} = \frac{P}{2}\cos\sec\alpha$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_2 = F_1 \cos\alpha$$

$$F_2 = \frac{P}{2}\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{P}{2}\text{cotg}\,\alpha$$



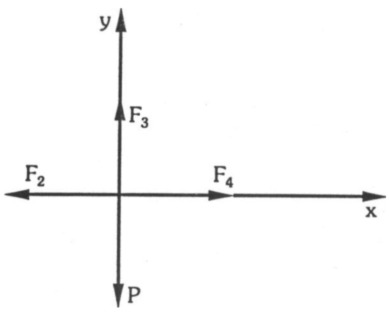
Determinada a força na barra 2, o nó que se torna mais simples para os cálculos é o nó D.

$$\sum F_y = 0$$

$$F_3 = P$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_4 = F_2 = \frac{P}{2}\text{cotg}\,\alpha$$

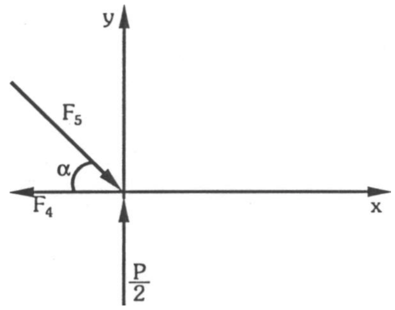


Para determinar a força normal na barra 5, utiliza-se o nó B.

Professor Luciano Rodrigues Ornelas de Lima
e-mail: llima@rdc.puc-rio.br
Sala 5016 – Bloco A

$$\sum F_y = 0$$

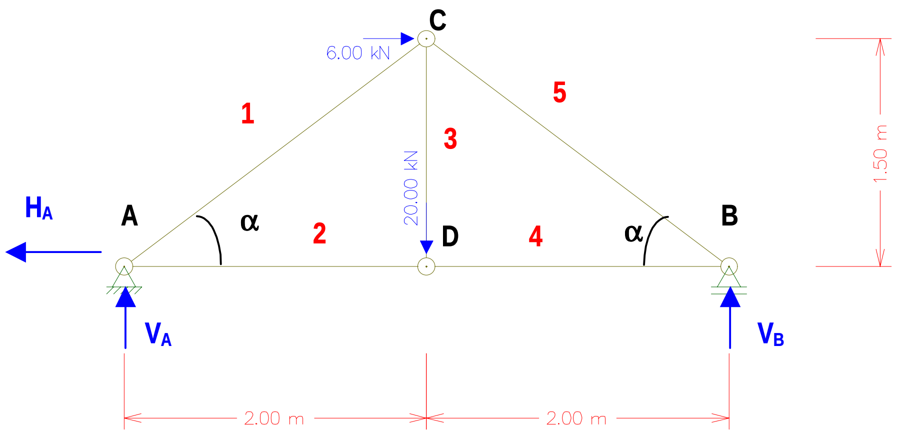
$$F_5 = \frac{P}{2\,\text{sen}\,\alpha} = \frac{P}{2}\text{cosec}\,\alpha$$



As forças normais nas barras 4 e 5, podem ser determinadas através da simetria da estrutura e do carregamento aplicado.

Exemplo 2

Determinar as forças normais nas barras da treliça dada.



Solução

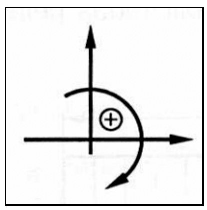
O ângulo α formado pelas barras 1 e 2 e pelas barras 4 e 5 deve ser determinado:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75 \Rightarrow \alpha = 37^o \quad (\text{sen } 37^o = 0{,}60 \text{ e } \cos 37^o = 0{,}80)$$

(a) Cálculo das reações de apoio

$$\sum M_A = \sum_{i=1}^{n} F_i d_i = 0$$

(a priori, adotar-se-á como positivo, o momento no sentido horário)



$$-V_B(4) + 20\,.\,2 + 6\,.\,1{,}5 = 0$$

$$V_B = 12{,}25\text{ kN}$$

Agora, pode-se utilizar a equação do somatório das forças verticais para obter-se a reação vertical no apoio B.

$$V_A + V_B = 20 \Rightarrow V_A = 7{,}75\,\text{kN}$$

E finalmente, aplicando-se a equação do somatório das reações horizontais igual a zero, tem-se,

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A - 6 = 0 \Rightarrow H_A = 6\,\text{kN}$$

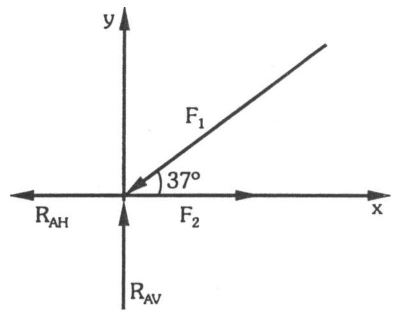
(b) Cálculo dos esforços nas barras

Inicia-se o cálculo dos esforços pelo nó A, que juntamente com o nó B é o que possui o menor número de incógnitas.

$$\sum F_y = 0$$

$$F_1 \operatorname{sen} 37^o = V_A$$

$$F_1 = \frac{7{,}75}{0{,}6} = 12{,}9\,\text{kN}$$



$$\sum F_x = 0$$

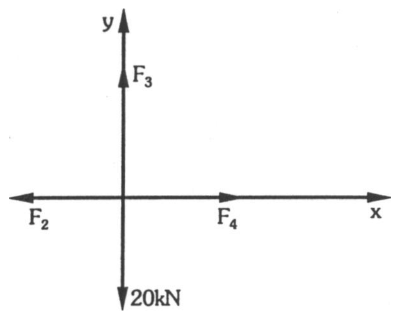
$$F_2 = H_A + F_1 \cos 37^o$$

$$F_2 = 6 + 12{,}9 . 0{,}8 = 16{,}3\ \text{kN}$$

Determinada a força F_2, o nó que se torna mais simples para prosseguir os cálculos é o nó C.

$$\sum F_x = 0$$

$$F_4 = F_2 = 16{,}3\,\text{kN}$$

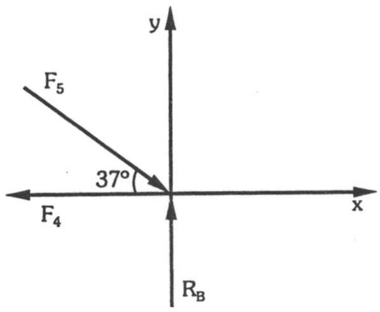


$$\sum F_y = 0$$

$$F_3 = 20\,\text{kN}$$

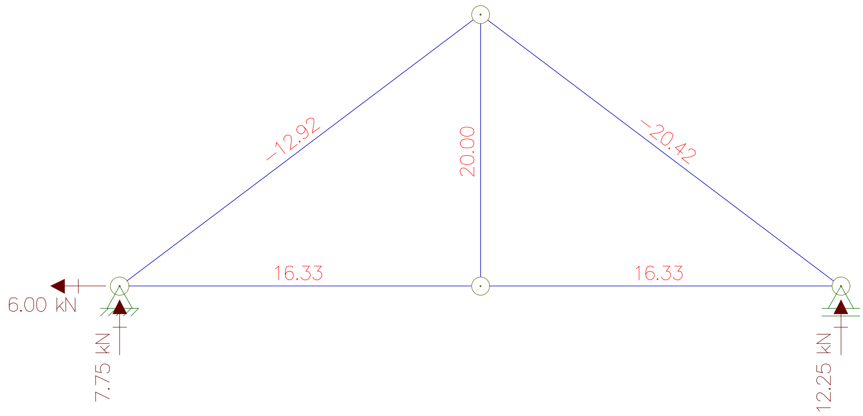
Para determinar a força normal na barra 5, utiliza-se o nó B.

$$\sum F_y = 0$$



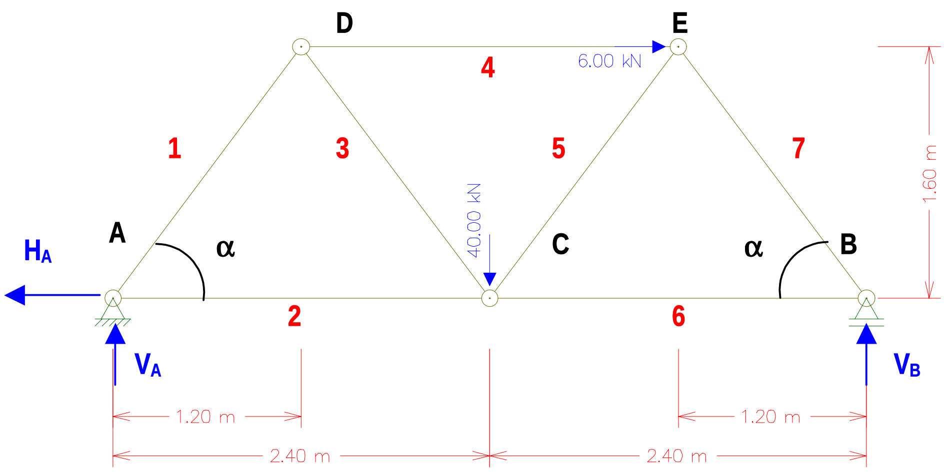
$$F_5 \text{ sen } 37^o = V_B$$

$$F_5 = 20{,}42 \text{ kN}$$



Exemplo 3

Determinar as forças normais nas barras da treliça dada.



Solução

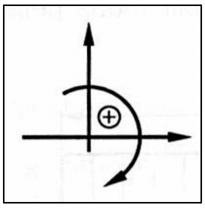
O ângulo α formado pelas barras 1 e 2 e pelas barras 4 e 5 deve ser determinado:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{1{,}6}{1{,}2} \Rightarrow \alpha = 53^o \text{ (sen } 53^o = 0{,}80 \text{ e cos } 53^o = 0{,}60)$$

(c) Cálculo das reações de apoio

$$\sum M_A = \sum_{i=1}^{n} F_i d_i = 0$$

(a priori, adotar-se-á como positivo, o momento no sentido horário)



$$-V_B(4{,}8) + 40\,.\,2{,}4 + 6\,.\,1{,}6 = 0$$

$$V_B = 22\,\text{kN}$$

Agora, pode-se utilizar a equação do somatório das forças verticais para obter-se a reação vertical no apoio B.

$$V_A + V_B = 40 \Rightarrow V_A = 18\,\text{kN}$$

E finalmente, aplicando-se a equação do somatório das reações horizontais igual a zero, tem-se,

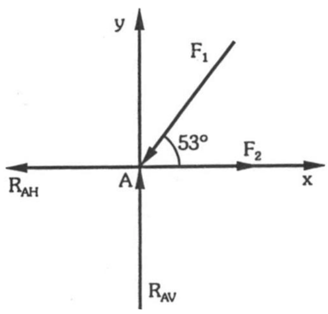
$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A - 6 = 0 \Rightarrow H_A = 6\,\text{kN}$$

(d) Cálculo dos esforços nas barras

Iniciando-se o cálculo dos esforços pelo nó A, determina-se a força normal nas barras 1 e 2.

$$\sum F_y = 0$$

$$F_1\,\text{sen}\,53^o = V_A$$



$$F_1 = \frac{18}{0{,}8} = 22{,}5\,\text{kN}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_2 = H_A + F_1 \cos 53^o$$

$$F_2 = 6 + 22{,}5 . 0{,}6 = 19{,}5\ \text{kN}$$

Determinada a força na barra 1, pode-se utilizar o nó D para calcular F_3 e F_4.

$$\sum F_y = 0$$

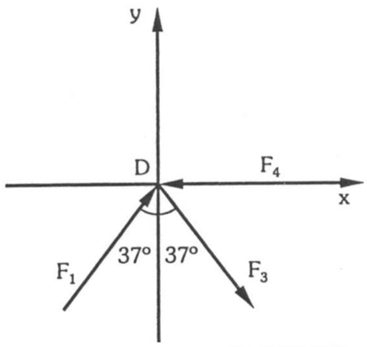
$$F_3 \cos 37^o = F_1 \cos 37^o$$

$$F_3 = F_1 = 22{,}5\,kN$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_4 = (F_1 + F_3)\,sen\,37^o$$

$$F_4 = (2\,.\,22{,}5)\,.\,0{,}6 = 27\,kN$$



O nó B é conveniente para os cálculos das forças nas barras 6 e 7.

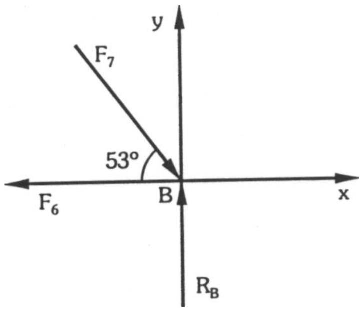
$$\sum F_y = 0$$

$$F_7 \; sen \; 53^o = V_B$$

$$F_7 = \frac{22}{0{,}8} = 27{,}5\,kN$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_6 = F_7 \cos 53^o = 27{,}5\,.\,0{,}6 = 16{,}5\,kN$$

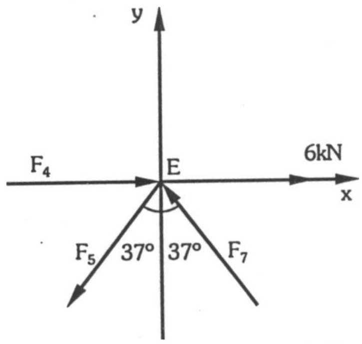


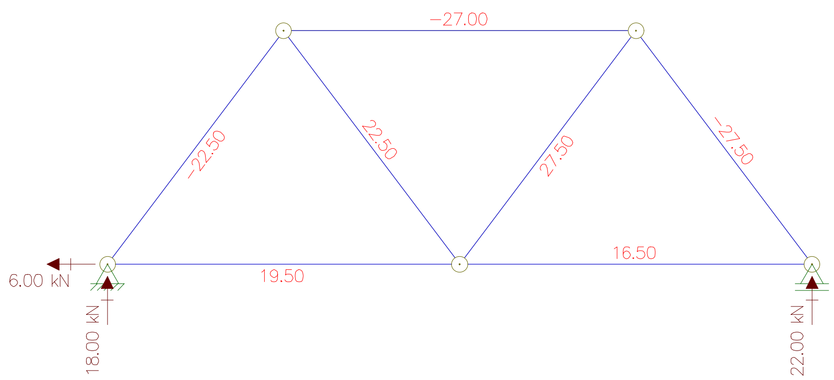
Finalmente, efetuando-se o equilíbrio do nó E, determina-se a força na barra 5.

$$\sum F_y = 0$$

$$F_5 \;\; \cos \;\; 37^o = F_7 \;\; \cos \;\; 37^o$$

$$F_5 = F_7 = 27{,}5\,kN$$





6.3. Métodos das Seções ou Método de Ritter

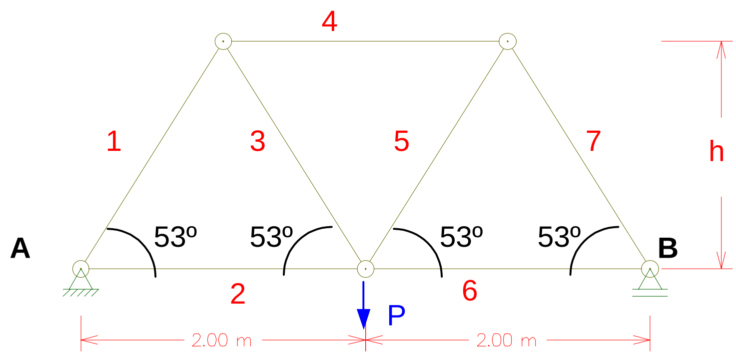
Para determinar as cargas axiais atuantes nas barras de uma treliça plana, através do método de Ritter, deve-se proceder da seguinte forma:

(a) corta-se a treliça em duas partes;
(b) adota-se uma das partes para verificar o equilíbrio, ignorando-se a outra parte até o próximo corte. Ao cortar a treliça deve-se observar que o corte a intercepte de tal forma, que se apresentem no máximo 3 incógnitas, para que possa haver solução, através das equações de equilíbrio. É importante ressaltar que entrarão nos cálculos, somente as barras da treliça que forem cortadas, as forças ativas e reativas da parte adotada para a verificação de equilíbrio.
(c) Repetir o procedimento, até que todas as barras da treliça estejam calculadas.

Neste método, pode-se considerar inicialmente todas as barras tracionadas, ou seja, barras que "puxam" os nós, as barras que apresentarem sinal negativo nos cálculos, estarão comprimidas.

Exemplo 4

Determinar as forças normais nas barras da treliça dada.



Solução

A altura h é determinada através da tangente de 53º:

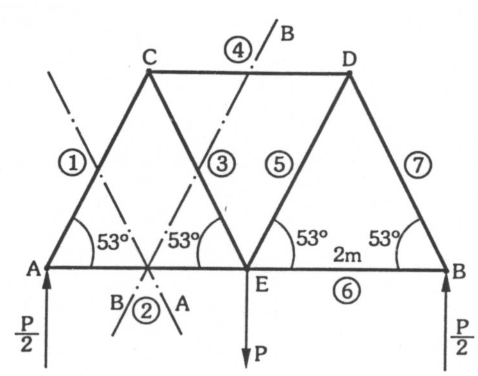
$$h = \text{tg}\, 53^{o} \Rightarrow h \approx 1{,}33\ \text{m}$$

(a) Cálculo das reações de apoio

Devido à simetria da estrutura e do carregamento, $V_A = V_B = P / 2$

(b) Cálculo dos esforços nas barras

Para determinar a carga axial nas barras 1 e 2, aplica-se o corte AA na treliça e adota-se a parte à esquerda do corte para verificar o equilíbrio.

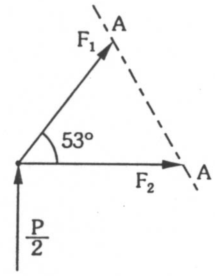


$$\sum F_y = 0$$

$$F_1 \text{ sen } 53^o + \frac{P}{2} = 0$$

$$F_1 = -\frac{P}{2 \text{ sen } 53^o}$$

F_1 = -0,625 P (barra comprimida)



$$\sum F_x = 0$$

$$F_2 + F_1 \cos 53^o = 0$$

$$F_2 = - F_1 \cos 53^o = -\left(-\frac{P}{2}.\frac{0{,}6}{0{,}8}\right)$$

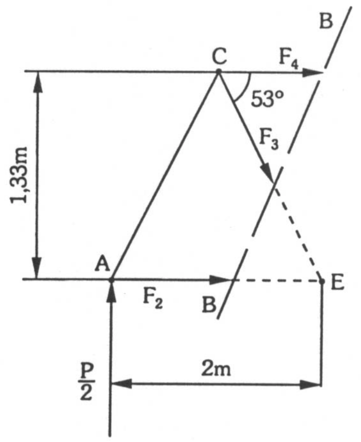
F_2 = + 0,375 P (barra tracionada)

Através do corte BB, determina-se as forças nas barras 3 e 4.

$$\sum M_E = 0$$

$$1{,}33\, F_4 + 2\frac{P}{2} = 0 \Rightarrow F_4 = -\frac{P}{1{,}33}$$

$F_4 = -0{,}75\,P$ (barra comprimida)



$$\sum F_y = 0$$

$$F_3 \text{ sen } 53^o = \frac{P}{2}$$

$$F_3 = \frac{P}{2 \text{ sen } 53^o} = 0{,}625\,P$$

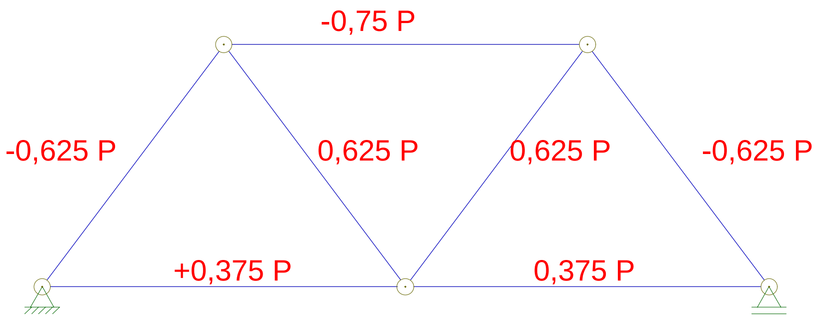
(barra tracionada)

Como a treliça é simétrica, pode-se concluir que:

$F_7 = F_1$ = - 0,625 P

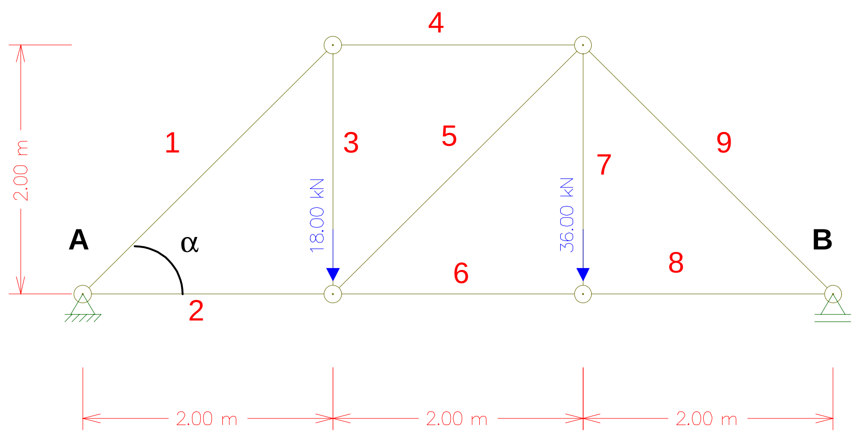
$F_6 = F_2$ = + 0,375 P

$F_5 = F_3$ = + 0,625 P



Exemplo 5

Determinar as forças normais nas barras da treliça dada.



Solução

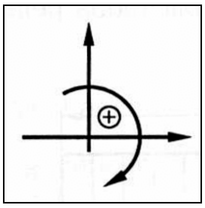
O ângulo α é determinado através de sua tangente.

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^o$$

(a) Cálculo das reações de apoio

$$\sum M_A = \sum_{i=1}^{n} F_i d_i = 0$$

(a priori, adotar-se-á como positivo, o momento no sentido horário)



$$-V_B(6) + 36\,.\,4 + 18\,.\,2 = 0$$

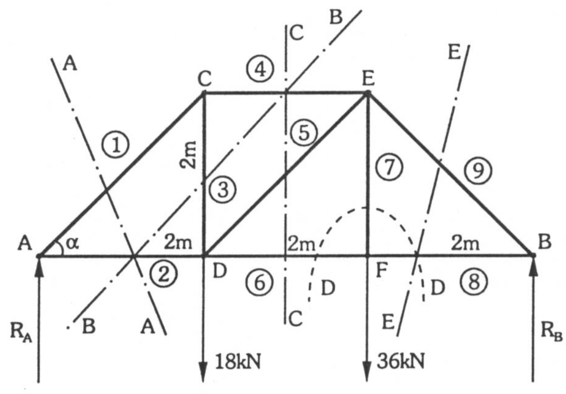
$$V_B = 30\,\text{kN}$$

Agora, pode-se utilizar a equação do somatório das forças verticais para obter-se a reação vertical no apoio B.

$$V_A + V_B = 54 \Rightarrow V_A = 24\,\text{kN}$$

(b) Cálculo dos esforços nas barras

Através do corte AA, determina-se as cargas axiais nas barras 1 e 2.



$$\sum F_y = 0$$

$$F_1 \text{ sen } 45^o + 24 = 0$$

$$F_1 = -\frac{24}{0{,}707}$$

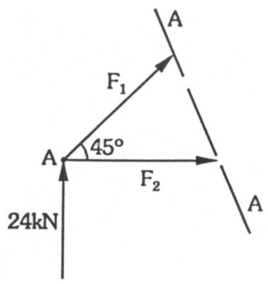
F_1 = -33,95 kN (barra comprimida)

$$\sum F_x = 0$$

$$F_2 + F_1 \cos 45^o = 0$$

$$F_2 = - F_1 \cos 45^o = -(- 33{,}95)0{,}707$$

F_2 = + 24 kN (barra tracionada)



Aplica-se o corte BB na treliça, e adota-se a parte à esquerda para cálculo, para que se determine a força axial nas barras 3 e 4.

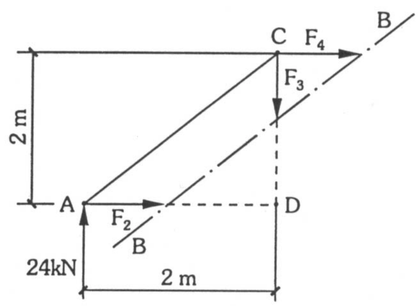
$$\sum F_y = 0$$

$F_3 = +24$ kN (barra tracionada)

$$\sum M_D = 0$$

$$2\,F_4 + 24.2 = 0 \Rightarrow F_4 = -24 \text{ kN}$$

(barra comprimida)



Para determinar as forças nas barras 5 e 6, aplica-se o corte CC, e adota-se a parte à esquerda do corte para cálculo.

$$\sum F_y = 0$$

$$F_5 \text{ sen } 45^o + 24 - 18 = 0$$

$$F_5 = -\frac{6}{0{,}707} = -8{,}49 \text{ kN}$$

(barra comprimida)

$$\sum M_E = 0$$

$$-2F_6 + 4.24 - 18.2 = 0 \Rightarrow F_6 = 30\,\text{kN}$$

(barra tracionada)

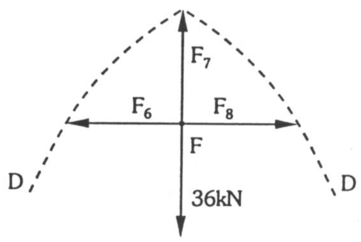
No corte DD, isola-se o nó F, para determinar a força na barra 7 e 8.

$$\sum F_y = 0$$

$F_7 = +36\,\text{kN}$ (barra tracionada)

$$\sum F_x = 0$$

$F_8 = F_6 = 30\,\text{kN}$ (barra tracionada)



Através do corte EE, determina-se a força axial na barra 9.

$$\sum F_y = 0$$

$F_9 \text{ sen } 45^o + 30 = 0$

$$F_9 = -\frac{30}{0{,}707} = -42{,}43\,\text{kN}$$

(barra comprimida)